

9. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Häufungspunkte)

Bestimmen Sie zu den angegebenen Folgen alle Häufungspunkte und den jeweiligen Limes inferior und superior.

- (a) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \begin{cases} 1 + 2 \cdot (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (c) $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe G2 (Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen)

- (a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert.
Insbesondere gibt es also eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.
(b) Fogern Sie, dass $\mathbb{Q}$ als metrischer Raum, ausgestattet mit der Metrik, die von $\mathbb{R}$ kommt, nicht vollständig ist.

Aufgabe G3 (Cauchy-Folgen und Teilfolgen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Zeigen sie, dass aus $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
(b) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in X . Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $c_{2n-1} := a_n$ und $c_{2n} := b_n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergieren und ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Häufungspunkte II; 5 Punkte)

Bestimmen Sie zu den angegebenen Folgen alle Häufungspunkte und den jeweiligen Limes inferior und superior.

- (a) $(\operatorname{Re}(3 \cdot (-1)^n + 6 \cdot i^n))_{n \in \mathbb{N}}$
- (b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := (\frac{2}{3})^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (c) $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit x_n wie in (b)

Aufgabe H2 (Eine Anwendung von Teilfolgen; 5 Punkte)

Seien $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen. Die Folge $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere in $\mathbb{R}$. Wir schreiben $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$. Zeigen Sie, dass $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergiert, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Hinweis:** Führen Sie einen indirekten Beweis und konstruieren Sie eine Teilfolge von $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

Aufgabe H3 (Ganz schön viele Häufungspunkte; 5 Punkte)

- (a) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die jede der Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Häufungspunkt hat. **Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis Division mit Rest benutzen.
- (b) Wir statten $\mathbb{N}$ mit der Metrik aus die von $\mathbb{R}$ kommt, d.h. wir haben $d(n, m) = |n - m|$. Zeigen, sie, dass es eine Folge in $\mathbb{N}$ gibt, die jede natürliche Zahl zum Häufungspunkt hat.
- (c) Zeigen Sie, dass es eine Folge in $\mathbb{R}$ gibt, die jede reelle Zahl zum Häufungspunkt hat.