

10. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Einige Reihen)

Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen divergiert, konvergiert bzw. absolut konvergiert. Verwenden Sie weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1} \quad & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \quad & \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\frac{1}{2^n}}{n^2} \\ \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3} \right)^n \quad & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Die Summe einer Reihe)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot 3^{n-1} - 2}{11^n}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

Aufgabe G3 (Eine Teleskopsumme)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_n := \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

- (a) Bestimmen Sie die Partialsumme $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$.
- (b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Einige Reihen II; 5 Punkte)

Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen divergiert, konvergiert bzw. absolut konvergiert. Verwenden Sie weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}} \quad & \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \\ \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Die Summe einer Reihe II; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{3^n}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

Aufgabe H3 (Ein paar theoretische Aufgaben; 5 Punkte)

- (a) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty[$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ konvergiert.
- (b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle monoton fallende Folge, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(nx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
- (c) Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\alpha \in]0, 1[$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. **Hinweis:** Um $d(x_{n+k}, x_n)$ abzuschätzen, können sie k -mal die Dreiecksungleichung anwenden.