

11. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Wurzel- bzw. Quotientenkriterium)

Zeigen Sie mit dem Wurzel- bzw. Quotientenkriterium, dass die Reihen

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3} \right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$$

konvergieren.

Aufgabe G2 (Trigonometrie)

In der Vorlesung wurde mit Hilfe der Additionstheoreme eine Darstellung für $\sin(2x)$ hergeleitet, wobei $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine analoge Darstellung für $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$.

Aufgabe G3 (Potenzreihen)

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot z^{2n+1}$.
- (b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ habe den Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^n$ den Konvergenzradius R hat.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Trigonometrie II; 5 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Finden Sie eine Darstellung von $\cos^4(x)$ als Summe von Termen der Form $k \cdot \cos(lx)$ mit $k, l \in \mathbb{Q}$.
- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$, finden Sie eine Darstellung von $\cos^n(x)$ als Summe von Termen der Form $k \cdot \cos(lx)$ mit $k, l \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe H2 (Wurzel- bzw. Quotientenkriterium II; 5 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}$ sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium auf Konvergenz.
- (b) Nach Bemerkung III.4.11. aus dem Skript divergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$. Untersuchen Sie, ob dies auch dann schon gilt, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$.

Aufgabe H3 (Potenzreihe II; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man für $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ als Potenzreihe auffassen kann und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Liegt auch auf dem Rand des Konvergenzkreises Konvergenz vor?

Aufgabe H4 (Cauchyprodukte; 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, die Gleichungen

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k \quad \text{und} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)z^k.$$

Hinweis: Bilden Sie Cauchyprodukte mit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

(b) Berechnen Sie mit (a) die Summen

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$