

13. Übungsblatt zur „Analysis I“

Bemerkung. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ stetig ist. Also ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall, und zwar $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ (da $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$). Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist also $\ln := \exp^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert und stetig. Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ definiert man die allgemeine Potenz $a^b = e^{b \ln a}$.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Eine Gleichung)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = x$ eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe G2 (Allgemeine Potenzen)

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

- (a) Zeigen Sie $a^b = e^{b \ln a}$ für $b \in \mathbb{Z}$.
- (b) Zeigen Sie $\sqrt[b]{a} = e^{\frac{1}{b} \ln a}$ für $b \in \mathbb{N}$.
- (c) Folgern Sie $a^b = e^{b \ln a}$ für $b \in \mathbb{Q}$.

Wir sehen, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Definition der allgemeinen Potenz $a^b := e^{b \ln a}$ mit dem alten Begriff der rationalen Potenzen konsistent ist.

Aufgabe G3 (Ein weiteres Kriterium für Stetigkeit)

- (a) Seien X und Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X , sodass $A \cup B = X$ und $p \in A \cap B$. Zeigen Sie, dass f genau dann in p stetig ist, wenn $f|_A$ und $f|_B$ in p stetig sind.
- (b) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $p \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in p genau dann stetig ist, wenn f in p sowohl rechtsseitig als auch linksseitig stetig ist.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Ein Homöomorphismus; 5 Punkte)

Man zeige, dass die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[, x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ bijektiv ist und, dass sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Aufgabe H2 (Eine weitere Gleichung; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-12x^2 + (x-1)^3 + 51x^{17} = e^{-24x^9-29x^7}$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat. **Hinweis:** Betrachten Sie Grenzübergänge für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$.

Aufgabe H3 (Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen; 5 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.

- (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \searrow p} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow p} f(x)$ für jedes $p \in \mathbb{R}$ existieren und $\lim_{x \nearrow p} f(x) \leq f(p) \leq \lim_{x \searrow p} f(x)$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte in denen f nicht stetig ist abzählbar ist.
Hinweis: Man kann verwenden, dass $\lim_{x \nearrow p} f(x) \neq \lim_{x \searrow p} f(x)$ wenn f in $p \in]a, b[$ unstetig ist.
- (c) Für $M \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung

$$1_M: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, \quad 1_M(n) := \begin{cases} 1 & : \text{wenn } n \in M \\ 0 & : \text{wenn } n \notin M. \end{cases}$$

Mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bezeichnen wir die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_M(n)}{10^n}$$

injektiv ist und folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.