14. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Einige Ableitungen)

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x^3 + 5)$ (b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$

(c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ (d) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-1}{x^2+1}$

(e) $f_5:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$ (f) $f_6:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^x)^x$

(g) $f_7:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{(x^x)}$ (h) $f_8:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

(i) $f_9:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ (j) $f_{10}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x^{\frac{3}{5}} + \sin^3(\frac{1}{x})}$.

Aufgabe G2 (Ableitung einer Umkehrfunktion)

- (a) Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{2} \sin(x)$ differenzierbar ist mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist f streng monoton wachsend.
(b) Es ist $f(0) = 0$. Berechnen Sie nun $(f^{-1})'(0)$.

Aufgabe G3 (Differenzierbarkeit eines Produkts)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in I$. Zeigen Sie:

- (a) Ist f in x_0 differenzierbar mit $f(x_0) = 0$ und g in x_0 stetig, so ist $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar mit $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0)$.
(b) Ist f in x_0 stetig mit $f(x_0) \neq 0$, so gibt es $\delta > 0$ mit $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
(c) Sind f und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und ist $f(x_0) \neq 0$, so ist g in x_0 differenzierbar.