Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
31.10.2013

3. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Ein Induktionsbeweis)

Robespierre will die erste These der Julirevolution “Alle Menschen sind gleich ”wissenschaftlich beweisen. Dazu macht er den folgenden Induktionsbeweis:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Je n Menschen sind gleich.

Beweis: Gegeben sei ein Mensch. Er ist gleich sich selber. Dies ist der Induktionsanfang. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben und die Aussage für n wahr. Gegeben seien $n+1$ Menschen. Nehme einen Menschen p heraus. Der Rest ist gleich. Füge p der Menge von Menschen wieder hinzu und nehme einen anderen Menschen q heraus. Die restlichen sind wieder gleich. Also ist p gleich dem Rest. QED

Ist Robespierres Beweis richtig?

Lösung: Der Beweis ist fehlerhaft. Der Induktionsschritt ist nur für $n \geq 3$ richtig. Da er auf der Transitivität der Gleichheit basiert. Nehmen wir eine Menge $A = \{p, q\}$, so kann man aus $A \setminus \{p\} = \{q\}$ und $A \setminus \{q\} = \{p\}$ nicht $p = q$ folgern.

Aufgabe G2 (Induktion)

Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach n.

IA: Für $n = 1$ gilt $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$.

IV: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

IS: Zum einen gilt:

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}.$$

Zum anderen rechnen wir mit Hilfe der IV:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n^2+2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}.\end{aligned}$$

Dies beweist die Aussage.

Aufgabe G3 (Abzählbarkeit von Mengen)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Menge X ist genau dann abzählbar, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon X \to \mathbb{N}$ gibt.

(b) Sind X eine abählbare Menge, Y eine Menge und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Funktion, dann ist auch Y abzählbar.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist.

Lösung:

(a) "$\Rightarrow$": Für jedes $y \in \mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Wir definieren die Abbildung

$$g\colon \mathbb{N} \to X, y \mapsto \begin{cases} x_y : & y \in \mathrm{im}(f) \\ x_0 : & y \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{im}(f). \end{cases}$$

Können wir zeigen, dass g surjektiv ist, so sind wir fertig. Für $x \in X$ erhalten wir $x_{f(x)} = x$, denn f ist injektiv. Zudem gilt $f(x) \in \mathrm{im}(f)$ und somit $g(f(x)) = x$.
"$\Leftarrow$": Sei nun X abzählbar, dann gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to X$. Für jedes $x \in X$ finden wir ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $g(n_x) = x$. Wir definieren nun die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto n_x$. Dass die Abbildung f injektive ist, zeigen wir wie folgt. Seien $x, x' \in X$ mit $n_x = f(x) = f(x') = n_{x'}$. Dann gilt $g(n_x) = g(n_{x'})$ und somit $x = x'$.

(b) Da X eine abzählbare Menge ist, gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to X$. Wir folgern mit H4 von Blatt 02, dass $f \circ g\colon \mathbb{N} \to Y$ eine surjektive Abbildung ist.

(c) Wir beweisen die Aussage durch Induktion.
IA.: $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$ ist nach Definition abzählbar.
IV.: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist, d.h. es gibt eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$.
IS.: Laut Vorlesung gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. Da Kompositionen von surjektiven Abbildungen surjektiv sind ist durch

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^{(n+1)}$$

eine surjektive Abbildung gegeben.