Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
15.11.2013

# 5. Übungsblatt zur „Analysis I“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G1** (Angeordnete Körper und Intervalle)

Sei $(K, K_+)$ ein angeordneter Körper.

(a) Seien $I, J \subseteq K$ Intervalle. Zeigen Sie, dass $I \cap J$ ein Intervall in $K$ ist.
(b) Seien $I, J \subseteq K$ Intervalle mit $I \cap J \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $I \cup J$ ein Intervall in $K$ ist.
(c) Sei $(I_j)_{j\in J}$ eine Familie von Intervallen aus $K$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{j\in J} I_j$ ist ein Intervall in $K$ ist.
(d) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{j\in J} I_j$ ein Intervall in $K$ ist, wenn die Intervalle paarweise nicht disjunkt sind, das heißt, wenn $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ für $i, j \in J$ gilt.

**Lösung:**

(a) Seien $x, y \in I \cap J$ und $z \in K$ mit $x \leq z \leq y$. Aus $x, y \in I$ folgt $z \in I$ und aus $x, y \in J$ folgern wir $z \in J$. Insgesamt erhalten wir $z \in I \cap J$.
(b) Seien $x, y \in I \cup J$, $z \in K$ mit $x \leq z \leq y$. Wir müssen $z \in J \cup I$ zeigen. Sei $w \in I \cap J \neq \emptyset$.
1. Fall $z \leq w$: Wir haben $w, x \in I$ und $x \leq z \leq w$ und folgern $z \in I \subseteq I \cup J$.
2. Fall $z \geq w$: Wir haben $w, y \in J$ und $w \leq z \leq y$ und folgern $z \in J \subseteq I \cup J$.
(c) Seien $x, y \in \bigcap_{j\in J} I_j$, $z \in K$ mit $x \leq z \leq y$. Für ein beliebiges $j \in J$ gilt $x, y \in I_j$, daraus folgt $z \in I_j$. Da $j \in J$ beliebig war folgt $z \in \bigcap_{j\in J} I_j$.
(d) Seien $x, y \in \bigcup_{j\in J} I_j$ und $z \in K$ mit $x \leq z \leq y$. Es gibt $j_1, j_2 \in J$ mit $x \in I_{j_1}$ und $y \in I_{j_2}$. Insgesamt erhalten wir also $x, y \in I_{j_1} \bigcup I_{j_2}$. Aus $I_{j_1} \cap I_{j_2} \neq \emptyset$ folgern wir mit (b), dass $z \in I_{j_1} \bigcup I_{j_2} \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$ gilt.

**Aufgabe G2** (Suprema und monotone Funktionen)

Sei $(K, K_+)$ ein angeordneter Körper. $f\colon K \to K$ heißt *monoton wachsend*, falls

$$(\forall a, b \in K) \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

(a) Seien $f\colon K \to K$ monoton wachsend, $K$ vollständig angeordnet und eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subseteq K$ gegeben. Zeigen Sie: Falls $\sup A < \infty$, so gilt

$$\sup f(A) \leq f(\sup A).$$

(b) Bestimmen Sie eine monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und eine Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ mit $\sup f(A) < f(\sup A)$.

**Lösung:**

(a) Sei $a \in A$. Es gilt $a \leq \sup A$. Wir folgern $f(a) \leq f(\sup A)$. Da sich jedes Element in $f(A)$ in der Form $f(a)$ für ein $a \in A$ schreiben lässt folgt $\sup f(A) \leq f(\sup A)$. Hierbei haben wir verwendet, dass $\sup f(A)$ existiert, die ist legitim, da $K$ vollständig angeordnet ist.

(b) Wir betrachten die Menge $A = [0, 1[_{\mathbb{Q}}$ und die monoton wachsende Abbildung

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \begin{cases} 1 & : x \geq 1 \\ 0 & : x < 1 \end{cases}$$

Es gilt $\sup A = 1$ und somit $f(\sup A) = 1$. Auf der anderen Seite gilt $f(A) = \{0\}$. Wir erhalten $\sup f(A) = 0$.

**Aufgabe G3** (Ein Infimum)

Seien $(K, K_+)$ ein vollständig angeordneter Körper und $a \in K_+$. Zeigen Sie, dass $\inf\{\frac{a}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

**Lösung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a}{n} > 0$. Also ist 0 eine untere Schranke der betrachteten Menge. Angenommen $b > 0$ wäre eine untere Schranke für die Menge. Nach dem Satz des Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n \cdot b$. Es folgt $\frac{a}{n} < b$. Dies wäre ein Widerspruch.

**Aufgabe G4** (Bernoullische Ungleichung)

(a) Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung um $2^n \geq 1 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nachzuweisen.

(b) Zeigen Sie die obige Ungleichung nun mit einer vollständigen Induktion.

**Lösung:**

(a) Wir rechnen $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n \cdot 1 = 1 + n$.

(b) Der Induktionsanfang ist klar. Wir rechnen $2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq 1 + n + n + 1 \geq (n + 1) + 1$.