Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
21.11.2013

6. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Rationale Potenzen)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper und $a, b \in K_+$.

(a) Zeigen Sie, dass die im Skript in Definition II.2.22 eingeführte rationale Potenz wohldefiniert ist. D.h., zu zeigen ist: Für alle $p, p' \in \mathbb{Z}$ und $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ gilt $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p']{a^{q'}}$.

(b) Zeigen Sie, $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Seien $p, p' \in \mathbb{Z}$ und $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, d.h. es gilt $pq' = p'q$. Seien $b = \sqrt[p]{a^q}$, d.h. $b > 0$ mit $b^p = a^q$ und $c = \sqrt[p']{a^{q'}}$, d.h. $c > 0$ mit $c^{p'} = a^{q'}$. Nun rechnen wir $b^{pp'} = (b^p)^{p'} = (a^q)^{p'} = (a^p)^{q'} = (c^{p'})^p = c^{p'p}$. Nun folgt $b = c$, da $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^{pp'}$ injektiv ist.

(b) Es gilt $((\sqrt[q]{a})^p)^q = ((\sqrt[q]{a})^q)^p = a^p$. Also folgt die Aussage.

Aufgabe G2 (Rechenregeln für rationale Potenzen)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper und $a, b \in K_+$.

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ aus $a < b$ auch $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass für $r \in \mathbb{Q}_+$ aus $a < b$ auch $a^r < b^r$ folgt.

(c) Zeigen Sie, $(ab)^r = a^r b^r$ für $r \in \mathbb{Q}_+$ gilt. **Hinweis**: Man betrachte zuerst die Fälle $r \in \mathbb{N}_0$ und $r = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, und setze dann beides zusammen.

Lösung:

(a) Wenn $\sqrt[n]{a} \not< \sqrt[n]{b}$, dann ist $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$ und somit $a = (\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n = b$ also $a \not< b$. Dies zeigt per Kontraposition die Behauptung.

(b) Seien $0 \leq a < b$ und $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Nach (a) gilt $\sqrt[q]{a} < \sqrt[q]{b}$. Es folgt $a^r = (\sqrt[q]{a})^p < (\sqrt[q]{b})^p = b^r$.

(c) Für $r \in \mathbb{N}_0$ gilt $(ab)^r = a^r b^r$. Denn dies gilt für $r = 0$ (beiden Seiten sind gleich 1). Und gilt die Gleichung für gegebenes r , so folgt $(ab)^{r+1} = ab \cdot a^r b^r = aa^r bb^r = a^{r+1} b^{r+1}$.
Ist $r = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gilt $(ab)^r = \sqrt[k]{ab}$ und $(a^r b^r)^k = (\sqrt[k]{a})^k (\sqrt[k]{b})^k = ab$ nach dem ersten Teil. Aufgrund der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel folgt damit, dass $a^r b^r = (ab)^r$.
Sei nun $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann folgt $(ab)^r = \sqrt[q]{ab}^p = (\sqrt[q]{a}\sqrt[q]{b})^p = \sqrt[q]{a}^p \sqrt[q]{b}^p = a^r b^r$.

Aufgabe G3 (Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)
Seien $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

(a) Sei $\overline{x} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der bernoullischen Ungleichung, dass

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n\overline{x}} \right)^n \geq \frac{x_n}{\overline{x}}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) und einer Induktion, dass

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Lösung:

(a) Wegen $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n\overline{x}} - 1 > -1$ rechnen mit der bernoullischen Ungleichung

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n\overline{x}} \right)^n = \left(1 + \frac{x_1 + \cdots + x_n - n\overline{x}}{n\overline{x}} \right)^n \geq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n - n\overline{x}}{\overline{x}}$$
$$= 1 + \frac{(n-1)\overline{x} + x_n - n\overline{x}}{\overline{x}} = 1 + \frac{x_n - \overline{x}}{\overline{x}} = \frac{x_n}{\overline{x}}$$

(b) Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist klar. Die Aussage gelte für $n - 1$. Nun rechnen wir

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n = \overline{x}^n \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n\overline{x}} \right)^n \underbrace{\geq}_{(a)} \overline{x}^n \cdot \frac{x_n}{\overline{x}} = \overline{x}^{n-1} x_n \underbrace{\geq}_{IV.} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Wurzelziehen zeigt die Behauptung.