Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
06.12.2013

8. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Einige Zahlenfolgen I)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(a) $a_n = n^{-k}$ für festes $k \in \mathbb{N}$

(b) $a_n = \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+1.000)}$

(c) $a_n = \frac{3(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5}$

(d) $a_n = \frac{(3n+1)^3}{(2n-1)(2-3n)^2}$

(e) $a_n = \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$

Lösung:

(a) Es gilt $n^k \geq n$ also $n^{-k} \leq \frac{1}{n} \to 0$.

(b) Es gilt

$$\frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+1.000)} = \frac{3n^3+3n-4n^2-4}{14n^3+7.000n} = \frac{n^3(3+3n^{-2}-4n^{-1}-4n^{-3})}{n^3(14+7.000n^{-2})}$$
$$= \frac{3+3n^{-2}-4n^{-1}-4n^{-3}}{14+7.000n^{-2}} \to \frac{3+-0-0-0}{14+0} = \frac{3}{14}.$$

(c) Es gilt

$$\frac{3(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5} = \frac{3n^{10}(1+\frac{1}{n})^{10})}{2n^{10}(1+n^{-1}+n^{-2})^5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(1+\frac{1}{n})^{10}}{(1+n^{-1}+n^{-2})^5}$$
$$\to \frac{3}{2}\cdot\frac{(1+0)^{10}}{(1+0+0)^5} = \frac{3}{2}.$$

(d) Wir rechnen

$$\frac{(3n+1)^3}{(2n-1)(2-3n)^2} = \frac{n^3(3+n^{-1})^3}{n(2-n^{-1})n^2(\frac{2}{n}-3)^2} \to \frac{(3+0)^3}{(2-0)(0-3)^2} = \frac{27}{2\cdot 9} = \frac{3}{2}.$$

(e) Wir erhalten

$$\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^k = \left(\frac{n(3+2n^{-1})}{n(4-n^{-1})}\right)^k = \frac{(3+2n^{-1})^k}{(4-n^{-1})^k} \to \frac{(3+0)^k}{(4-0)^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Aufgabe G2 (Eine rekursiv definierte Folge)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{a_n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
(c) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang ist klar. Die Aussage gelte für festes $n \in \mathbb{N}$. Mit $a_n \leq 2$ erhalten wir $a_{n+1} = 1+\frac{a_n}{2} \leq 1+\frac{2}{2} = 2$. Zudem erhalten wir aus $a_n \leq 2$ die Abschätzung $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}(2 + a_n) \geq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$.
(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine reelle nach oben beschränkte monoton wachsende Folge. Nach Vorlesung ist diese konvergent.
(c) Sei a der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gelten $a_n \to a$ und $a_{n+1} \to a$. Mit $a_{n+1} = 1+\frac{a_n}{2}$ erhalten wir durch Grenzübergang auf beiden Seiten die Gleichung $a = 1 + \frac{a}{2}$. Auflösen nach a liefert $a = 2$.

Aufgabe G3 (Folgen und abgeschlossene Mengen I)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Folge in A, die in X gegen ein $a \in X$ konvergiert, so ist $a \in A$.

Lösung: Angenommen es gilt $a \notin A$. Da A abgeschlossen ist muss $X \setminus A$ offen sein. Mit $a \in X \setminus A$ finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq X \setminus A$. Keines der Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also in der ε-Kugel um a. Das bedeutet aber, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Dies ist ein Widerspruch.