Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
12.12.2013

9. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Häufungspunkte)

Bestimmen Sie zu den angegebenen Folgen alle Häufungspunkte und den jeweiligen Limes inferior und superior.

(a) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \begin{cases} 1 + 2\cdot(-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung:

(a) Da die Folge gegen 0 konvergiert, ist 0 der einzige Häufungspunkt. Ebenso gilt $\overline{\lim}\frac{(-1)^n}{n} = \underline{\lim}\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

(b) Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1. $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele ungerade Zahlen. Dann hat $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge die gegen 0 konvergiert. Da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, schließen, wir, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Fall 2. $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade Zahlen. Dann gibt es eine Teilfolge von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit n_k gerade für alle k. Nach Übergang zu dieser Teilfolge nehmen wir o.B.d.A. an, dass n_k gerade für alle $k\in\mathbb{N}$ ist. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung.

Fall 2.1. $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade zahlen, die durch 4 teilbar sind. Dann hat $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die konstant gleich $1+2=3$ ist. Da Teilfolgen konvergenter Teilfolgen wieder konvergent sind, folgern wir, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 3 konvergiert.

Fall 2.2. $\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind. Dann gibt es eine eine Teilfolge von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die konstant gleich $1-2=-1$ ist. Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1 konvergiert.

Aus dieser Fallunterscheidung schließen wir, dass jeder Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines der Element $0, 3, -1$ sein muss. Die Teilfolge $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, die Teilfolge $(x_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 3 und die Teilfolge $(x_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen -1. Wir folgern, dass die Menge der Häufugspunkte tatsächlich durch $\{0, 3, -1\}$ gegeben ist. Nun erhalten wir $\overline{\lim} x_n = 3$ und $\underline{\lim} x_n = -1$.

(c) Wir schreiben $x_n := \left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
Fall 1. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade Zahlen. Dann können wir von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ wählen, sodass n_{k_l} für alle $l \in \mathbb{N}$ gerade ist. Es gilt $x_{n_{k_l}} = (-1)^{n_{k_l}} \frac{n_{k_l}}{n_{k_l}+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n_{k_l}}} \to 1$. Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.
Fall 2. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele ungerade Zahlen. Dann wie im ersten Fall finden wir eine Teilfolge von (x_{n_k}), die gegen -1 konvergiert. Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.
Da $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert und $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1 konvergiert folgern wir, dass die Menge der Häufungspunkte durch $\{-1, 1\}$ gegeben ist. Wir erhalten $\overline{\lim} x_n = 1$ und $\underline{\lim} x_n = -1$.

Aufgabe G2 (Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen)

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Kostruieren Sie eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert. Insbesondere gibt es also eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.
(b) Fogern Sie, dass $\mathbb{Q}$ als metrischer Raum, ausgestattet mit der Metrik, die von $\mathbb{R}$ kommt, nicht vollständig ist.

Lösung:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein rationale Zahl $q_n \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$. Nun gilt $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.
(b) Wir wissen aus (a), dass es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen in $\mathbb{Q}$ gibt, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Wir erhatlen, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathbb{Q}$ den Betrag von $\mathbb{R}$ erbt, ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Jedoch hat $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert q, da sie sonst auch, aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}$ gegen diese rationale Zahl konvergieren würde. Aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert die Folge aber gegen $\sqrt{2}$. Da Grenzwert in metrischen Räumen eindeutig sind würde folgen, dass $\sqrt{2}$ rational ist. Dies ist bekanntlich ein Widerspruch.

Aufgabe G3 (Cauchy-Folgen und Teilfolgen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen sie, dass aus $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $c_{2n-1} := a_n$ und $c_{2n} := b_n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergieren und ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für $k, n \in \mathbb{N}$ rechnen wir

$$\begin{aligned} &d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ \leq &\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k-1}} = \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{2^j} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Da $2 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, können wir ein N wählen, sodass ab diesem $d(x_n, x_{n+k}) \leq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Da aus Konvergenz einer Folge, die Konvergenz aller Teilfolgen folgt, erhalten wir die erste Richtung der Aussage. Es gelte nun $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ die Ungleichungen $|a_n - x| \leq \varepsilon$ und $|b_n - x| \leq \varepsilon$ gelten. Sei nun $m \geq 2N + 1$. 1. Fall m ist gerade, dann gilt $m = 2n$ für ein $n \geq N$. Es folgt $c_m = b_n$. Wir erhalten also $|c_m - x| < \varepsilon$. 2. Fall m ist ungerade, dann gilt $m = 2n + 1$ mit $n \geq N$. Wir erhalten also $c_m = a_n$ und folgern $|c_m - x| < \varepsilon$. Insgesamt erhalten wir also $c_n \to x$.