Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
20.12.2013

10. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Einige Reihen)

Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen divergiert, konvergiert bzw. absolut konvergiert. Verwenden Sie weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\frac{1}{2^n}}{n^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}.$$

Können wir zeigen, dass die letzte Reihe konvergiert, so folgt die Konvergenz der betrachteten Reihe aus dem Majorantenkriterium. Die Konvergenz der letzten Reihe folgt aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$. Da die Folge über die summiert wird positiv ist, folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

(b) Es gilt

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1.$$

Wir folgern, dass die Reihe divergent ist.

(c) Wir rechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1-\frac{1}{2^n}}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| + \left|\frac{1}{n^2 2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left|\frac{1}{n^2}\right| < \infty.$$

Und folgern aus dem Majoranten Kriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

(d) Wir schreiben $x_n := \frac{n^2+n+1}{2n^2+3}$ und erhalten $x_n = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} \to \frac{1}{2}$. Wir folgern, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_n \leq \frac{3}{4}$ für alle $n \geq N$ gilt. Wir erhalten $\sum_{n=N}^{\infty} x_n^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty$. Die Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium. Da die Folge über die summiert wird positiv ist, folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

(e) Für $n \geq 4$ gilt

$$\left(\frac{2^n}{\sqrt{n!}}\right)^2 = \frac{4^n}{n!} = \frac{4^5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \cdot \underbrace{\frac{4 \cdot \ldots \cdot 4}{(n-5) \cdot \ldots \cdot 5}}_{\leq 1} \cdot \frac{4^4}{4!}$$

$$\leq \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \underbrace{\frac{4^9}{4!}}_{=:C}$$

Da $\left(\frac{n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 4$, sodass $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \leq \frac{1}{n^4}$ für alle $n \geq N$ gilt. Für diese n gilt nun $\left(\frac{2^n}{\sqrt{n!}}\right)^2 \leq \frac{C}{n^4}$. Wir folgern $\frac{2^n}{\sqrt{n!}} \leq \frac{\sqrt{C}}{n^2}$. Nun rechnen wir

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{(-2^n)}{\sqrt{n!}}\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sqrt{C}}{n^2}.$$

Die absolute Konvergenz der Reihe folgt nun aus dem Majorantenkriterium.

Aufgabe G2 (Die Summe einer Reihe)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot 3^{n-1} - 2}{11^n}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

Lösung: Wir rechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot 3^{n-1} - 2}{11^n} = \frac{10}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{11}\right)^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{11}\right)^n$$

$$= \frac{10}{11} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{11}\right)^n - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{11}\right)^n - 1\right) = \frac{10}{11} \frac{1}{1 - \frac{3}{11}} - 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{11}} - 1\right)$$

$$= \frac{10}{11} \frac{11}{8} - \frac{2}{10} = \frac{21}{20}.$$

Aufgabe G3 (Eine Teleskopsumme)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_n := \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

(a) Bestimmen Sie die Partialsumme $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Lösung: Es gilt

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n} - \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n+1} = \sum_{n=1}^{k} \sqrt{n} - \sum_{n=2}^{k+1} \sqrt{n} = 1 - \sqrt{k+1} \to -\infty.$$

Es folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.