Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
17.01.2014

12. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (ε-δ-Kriterium)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -x & : x \leq 0 \\ 5x & : x > 0 \end{cases}$$

in 0 stetig ist. Ist f eine stetige Funktion? Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion.

(b) Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & : x \leq 0 \\ x+1 & : x > 0 \end{cases}$$

unstetig ist. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{5}$. Sei $y \in B_\delta(0)$. Wir betrachten den Fall $y < 0$, dann gilt

$$|f(y) - f(0)| = |y| < \delta < \varepsilon.$$

Nun betrachten wir den Fall $y > 0$. Es gilt

$$|f(y) - f(0)| = |5y| < 5\delta = \varepsilon.$$

Ist $x < 0$, so ist f in x stetig, da die Funktion $]-\infty, 0[,\ x \mapsto x$ stetig ist. In einem Punkt $x > 0$ ist g stetig, da die Funktion $]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x+1$ als Summe stetiger Funktionen stetig ist.

(b) Wir zeigen, dass g in 0 unstetig ist. Sei $\delta > 0$. Für alle $y \in]0, \delta[$ erhalten wir

$$|f(y) - f(0)| = |y+1| = y+1 > 1.$$

Aufgabe G2 (Eine nirgends stetige Funktion)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt stetig ist.

Lösung: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Für jedes $\delta > 0$ gibt es eine rationale Zahl $q \in B_\delta(x)$. Es gilt also

$$|f(q) - f(x)| = 1.$$

Wir folgern, dass f in jeder irrationalen Zahl unstetig ist.

Wir zeigen ein Lemma.

Lemma. *Sind $x < y$ reelle Zahlen, so enthält das Intervall $[x, y]$ immer eine irrationale Zahl.*

O.B.d.A. seien $x \in \mathbb{Q}$ und $x, y > 0$. Wir wissen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es gibt ein $n \in mathbbN$, sodass $\frac{1}{n}\sqrt{2} < y - x$. Natürlich muss $\frac{1}{n}\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein. Wir folgern, dass $x + \frac{1}{n}\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Offensichtlich ist diese Zahl in $[x, y]$ enthalten.

Um zu zeigen, dass f in jedem irrationalen x unstetig ist, können wir genauso argumentieren wie in im Fall $x \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe G3 (Eine andere Formulierung von Stetigkeit)

Seien X und Y metrische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(A)$ in X abgeschlossen ist.

Lösung: $\Rightarrow$: Seien f stetig und $A \subseteq Y$ abgeschlossen. $Y \setminus A$ ist offen und somit ist auch $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A)$ offen in X. Wir folgern, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

$\Leftarrow$: Sei $U \subseteq Y$ offen. Wir folgern, dass $f^{-1}(X \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ abgeschlossen ist. Und erhalten, dass $f^{-1}(U)$ offen ist.