Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014
24.01.2013

13. Übungsblatt zur „Analysis I“

Bemerkung. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ stetig ist. Also ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall, und zwar $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ (da $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$). Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist also $\ln := \exp^{-1}\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert und stetig. Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ definiert man die allegmeine Potenz $a^b = e^{b \ln a}$.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Eine Gleichung)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = x$ eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

Lösung: Nullstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} - x$ sind Lösungen der obigen Gleichung. Es gilt $f(-1) = e+1 > 0$ und $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, da aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion $e > 1$ folgt. Die Aussage folgt nun aus dem Zwischenwertsatz.

Aufgabe G2 (Allgemeine Potenzen)

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

(a) Zeigen Sie $a^b = e^{b \ln a}$ für $b \in \mathbb{Z}$.
(b) Zeigen Sie $\sqrt[b]{a} = e^{\frac{1}{b} \ln a}$ für $b \in \mathbb{N}$.
(c) Folgern Sie $a^b = e^{b \ln a}$ für $b \in \mathbb{Q}$.

Wir sehen, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Definition der allgemeinen Potenz $a^b := e^{b \ln a}$ mit dem alten Begriff der rationalen Potenzen konsistent ist.

Lösung:

(a) Für $b = 0$ gilt die Gleichung. Sei $b \in \mathbb{N}$. Mit Induktion sieht man leicht $\exp(\sum_{i=1}^n a_i) = \prod_{i=1}^n \exp(a_i)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$. Nun rechnen wir

$$\exp(b \ln a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{b} \ln(a)\right) = \prod_{k=1}^{b} \exp(\ln(a)) = \prod_{k=1}^{b} a = a^b$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (da $\exp(-x) \cdot \exp(x) = \exp(0) = 1$). Aus $-b > 0$ erhalten wir

$$\exp(b \ln a) = \frac{1}{\exp(-b \ln a)} = \frac{1}{a^{-b}} = a^b.$$

(b) Wir rechnen

$$\left(\exp(\frac{1}{b}\ln a)\right)^b = \prod_{k=1}^{b} \exp(\frac{1}{b}\ln a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b}\ln a\right) = a.$$

(c) Seien $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $b = \frac{p}{q}$. Nach (a) gilt $a^p = \exp(p \ln a)$. Wir folgern

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = (\exp(p\ln a))^{\frac{1}{q}} = \exp(\frac{1}{q}\cdot \ln\exp(p\ln a)) = \exp(\frac{1}{q}p\ln(a)).$$

Aufgabe G3 (Eine weiteres Kriterium für Stetigkeit)

(a) Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X, sodass $A \cup B = X$ und $p \in A \cap B$. Zeigen Sie, dass f genau dann in p stetig ist, wenn $f|_A$ und $f|_B$ in p stetig sind.

(b) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $p \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in p genau dann stetig ist, wenn f in p sowohl rechtsseitig als auch linksseitig stetig ist.

Lösung:

(a) $\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta^X(p) \cap A = B_\delta^A(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$ und $B_\delta^X(p) \cap B = B_\delta^B(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p)))$. Wir folgern

$$B_\delta^X(p) = B^X(p) \cap (A \cup B) = (A \cap B_\delta^X(p)) \cup (B \cap B_\delta^X(p)) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(p))).$$

$\Rightarrow$: Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta^A(p) \subseteq B_\delta^X(p) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$. Wir sehen, dass $f|_A$ stetig in p ist. Die Stetigkeit von $f|_B$ folgt daraus natürlich auch.

(b) $\Rightarrow$: Sei f in p stetig. Mit (a) folgern wir, dass $f|_{D\cap]-\infty,p]}$ und $f|_{D\cap[p,\infty[}$ in p stetig sind.

$\Leftarrow$: Aus der Stetigkeit von $f|_{D\cap]-\infty,p]}$ und $f|_{D\cap[p,\infty[}$ in p folgern wir mit (a), die Stetigkeit von f in p.