Prof. Dr. Helge Glöckner | Wintersemester 2013/2014
17.10.2013

1. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Aussagenlogik, Wahrheitstabellen)

Es seien p und q Aussagen.

(a) Geben Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage $s =$ “p oder q” an.
(b) Geben Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage $t =$ “entweder p oder q” an.
(c) Finden Sie einen logischen Ausdruck in den Buchstaben p und q und der Konnektoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der eine logisch zu t äquivalente Aussage repräsentiert. Weisen Sie diese Äquivalenz anhand einer Wahrheitstabelle nach.

Lösung:

(a) Wie in der Vorlesung geben wir die Wahrheitstabelle für die Aussage s an:

p	q	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(b) Wie oben erhalten wir für t:

p	q	t
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(c) Eine mögliche Formulierung ist gegeben durch $t = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Ob diese Formulierung tatsächlich stimmt prüfen wir nun mit Hilfe der Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Vergleichen wir nun die rechte Seite der oberen Tabellen mit der aus (b), so sehen wir dass tatsächlich $t = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ gilt.

Aufgabe G2 (Das Lesen logischer Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Formulieren Sie jede der folgenden Aussagen in natürlicher Sprache. Entscheiden Sie, welche der Aussagen wahr, welche falsch sind. Im Falle der Wahrheit begründen Sie diese; widerlegen Sie sie andernfalls, bei Allaussagen durch ein Gegenbeispiel.

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = k$
(b) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 = k$
(c) $(\exists! n \in \mathbb{N}) n^2 - 3n + 2 = 0$
(d) $(\forall n \in \mathbb{N})\big((\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}) n = 5l\big)$.

Lösung:

(a) Eine mögliche Formulierung ist: "Für jede natürliche Zahl gilt, dass wenn wir sie quadrieren, wir eine zweite natürliche Zahl finden können, sodass diese mit dem Quadrat übereinstimmt."
Diese Aussage ist wahr. Wir wollen sie mit Hilfe einer Induktion beweisen.
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. In diesem Fall gilt natürlich $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsvorschrift: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass wir ein $k \in \mathbb{N}$ finden können, sodass $n^2 = k$ gilt.
Induktionsschritt: Es gilt $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = k + n + n + 1$. Aus $n, k, 1 \in \mathbb{N}$ folgt, $(n+1)^2 \in \mathbb{N}$.
Dies beendet den Beweis.

(b) Eine mögliche Formulierung ist: "Wir können eine natürliche Zahl finden, die mit jeder Quadratzahl übereinstimmt."
Diese Aussage ist falsch. Wir wollen sie mit einem indirekten Beweis widerlegen.
Angenommen es gäbe ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $k = n^2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann erhielten wir auf der einen Seite $k = n^2 = 1$ mit $n = 1$ und auf der anderen $k = n^2 = 4$ mit $n = 2$. Daraus würde $1 = 4$ folgen. Dies ist ein Widerspruch, also muss die Aussage falsch sein.

(c) Eine mögliche Umformulierung ist: "Das Polynom $x^2 - 3x + 2$ hat genau eine Nullstelle, die eine natürliche Zahl ist."
Diese Aussage ist falsch. Die natürlichen Zahlen 1 und 2 sind (alle) Nullstellen des Polynoms, es hat also mehr als nur eine natürliche Zahl als Nullstelle.

(d) Eine mögliche Formulierung ist: "Ist eine Quadratzahl durch 5 teilbar, dann ist auch ihre Wurzel durch 5 teilbar."
Diese Aussage ist wahr. Wir beweisen sie wie folgt.
Sei $p_1^{i_1}, .., p_m^{i_m}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann ist $p_1^{2i_1}, .., p_m^{2i_m}$ die Primfaktorzerlegung von n^2. Da n^2 durch 5 geteilt wird gibt es ein $j \in \{1, .., m\}$ mit $p_j = 5$ (d.h. eine der Primzahlen muss 5 sein). Nun folgt direkt, dass 5 auch n teilt.

Aufgabe G3 (Das Negieren von Aussagen)

Man nehme an, dass es Töpfe und Deckel jeder Form und Größe gebe. Ein Deckel passe genau dann auf einen Topf, wenn beide die gleiche Form und Größe besitzen. Entscheiden Sie unter diesen Annahmen, welche der folgenden Aussagen wahr, welche falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Formulieren Sie im Anschluss für jede der Aussagen ihre Negation (in möglichst knapper Form).

(a) Auf jeden Topf passt ein Deckel.
(b) Es gibt einen Topf, auf den alle Deckel passen.
(c) Jeder Deckel passt auf mindestens einen Topf.
(d) Es gibt einen Topf, auf den ein Deckel passt.
(e) Auf jeden Topf passen alle Deckel.
(f) Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe passt.

Negieren Sie nun die folgende Aussage: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m > n$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr, da, ist ein Topf gegeben, so gibt es einen Deckel in jeder Größe und Form, insb. also auch in der des gegebenen Topfes.
Negation: Es gibt einen Topf auf den kein Deckel passt.

(b) Die Aussage ist flasch, denn es gibt Deckel unterschiedlicher Form und Größe. Wenn zwei Deckel auf einen Topf passen, müssen sie aber die gleiche Form und Größe haben.
Negation: Für jeden Topf gibt es einen Deckel der nicht passt.

(c) Diese Aussage ist wahr. Die Begründung ist die gleiche wie bei Aussage (a), mit vertauschten Rollen für Töpfe und Deckel.
Negation: Es gibt einen Deckel, der auf keinen Topf passt.

(d) Diese Aussage ist wahr, denn auf jeden Topf passt ein Deckel und es gibt Töpfe.
Negation: Auf keinen Topf passt ein Deckel.

(e) Diese Aussage ist falsch, denn es gibt Töpfe und es gibt nach (b) keinen, auf den alle Deckel passen.
Negation: Es gibt einen Topf und einen Deckel, der nicht auf ihn passt.

(f) Diese Aussage ist falsch. Die Begründung ist die gleiche wie bei Aussage (b), mit vertauschten Rollen für Deckel und Töpfe.
Negation: Für jeden Deckel gibt es einen Topf, auf den er nicht passt.

Die Negation der Aussage $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) m > n$ ist gegeben durch:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) m \leq n.$$

Hausübungen

Aufgabe H1 (Beweis durch Fallunterscheidung)

Es seien p, q und r Aussagen. Zeigen Sie:

$$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow r.$$

(Dies bezeichnet man als Beweis durch Fallunterscheidung.) Satz I.1.5 aus dem Skript wurde durch Fallunterscheidung bewiesen. Bestimmen Sie die Aussagen p, q und r in diesem Beweis.

Lösung: Seien wie in der Aufgabe die Aussagen p, q und r gegeben. Wir definieren $s_1 := p \vee q$, $s_2 := (p \Rightarrow r)$, $s_3 := (q \Rightarrow r)$ und $t := s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$. Nun stellen wir die Wahrheitstabelle für die Aussage $t \to r$ auf.

p	q	r	s_1	s_2	s_3	t	$t \Rightarrow r$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Da in der rechten Spalte nur Einsen vorkommen, ist die Aussage bewiesen.

Im Beweis von Satz I.1.5 waren die Aussagen p, q und r wie folgt gegeben:
p: $(\exists l \in \mathbb{N}) k = 2l$
q: $(\exists l \in \mathbb{N}) k = 2l - 1$
r: $(\exists l \in \mathbb{N}) k^2 - 3 \neq 4l$.

Aufgabe H2 (Das Aufstellen logischer Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Stellen Sie die folgenden Aussagen in Form logischer Formeln auf, negieren Sie diese und begründen Sie jeweils, welche wahr ist, die Aussage oder die Negation.

(a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen p und q, deren Produkt n teilt. (Formulieren Sie nicht aus, was es heißt eine Primzahl zu sein.)
(b) Jede ungerade natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
(c) Alle geraden natürlichen Zahlen haben nur einen ungeraden Teiler, nämlich 1.
(d) Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt, falls m größer oder gleich n ist und n größer oder gleich m, dass m und n gleich sind.

Lösung:

(a) Aussage in logischer Form:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{N})(p \text{ ist prim}) \wedge (q \text{ ist prim}) \wedge \big((\exists m \in \mathbb{N}) n = m \cdot p \cdot q\big).$$

Negation der Aussage:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall q \in \mathbb{N})(p \text{ ist nicht prim}) \vee (q \text{ ist nicht prim}) \vee \big((\forall m \in \mathbb{N}) n \neq m \cdot p \cdot q\big).$$

Die Aussage ist falsch und damit die Negation richtig. Z.B. hat die natürliche Zahl 1 überhaupt keine Primteiler, also gibt es auch kein Produkt von Primzahlen das sie teilt.

(b) Aussage in logischer Form:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\ n = (2m+1) \cdot k.$$

Negation der Aussage:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ n \neq (2m+1) \cdot k.$$

Die Aussage ist falsch und damit die Negation richtig. Die natürliche Zahl 1 hat keinen Teiler außer 1. Damit kann sie keinen Teiler ungleich 1 haben.

(c) Aussage in logischer Form:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\big((\exists k \in \mathbb{N})\ 2n = k \cdot (2m-1)\big) \Leftrightarrow m = 1.$$

Negation der Aussage:

$$\begin{aligned}(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\big(((\forall k \in \mathbb{N})\ 2n \neq k \cdot (2m-1)) \wedge m = 1\big) &\vee \\ \big(((\exists k \in \mathbb{N})\ 2n = k \cdot (2m-1)) \wedge m \neq 1\big)&.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir für Aussagen p und q die Relation $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ benutzt. Da der erste Teil in der Oder-Aussage immer falsch ist, kann die Negation wie folgt vereinfacht werden:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})((\exists k \in \mathbb{N})\ 2n = k \cdot (2m-1)) \wedge m \neq 1$$

Dies können wir umschreiben zu

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\ 2n = k \cdot (2m+1)$$

Die Aussage ist falsch und damit die Negation richtig. Z.B. ist die gerade Zahl $6 = 2 \cdot 3$ durch 3 teilbar und 3 ist ungleich 1.

(d) Aussage in logischer Form:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge m \geq n) \Rightarrow n = m$$

Negation der Aussage:

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge m \geq n) \wedge n \neq m.$$

Hierbei haben wir $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ verwendet.
Die Aussage ist richtig, denn wenn zwei natürliche Zahlen verschieden sind, so ist eine echt kleiner als die andere, also insbesondere nicht größer oder gleich.

Aufgabe H3 (Indirekter Beweis)

Es sei M eine Menge. Zeigen Sie: $(\exists x) x \notin M$.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und leiten Sie hieraus einen Widerspruch her.

Lösung: Angenommen für alle x gelte $x \in M$. Dann betrachten wir die Menge $N := \{x \in M : x \notin x\}$. Es gilt $N \in M$. Nun machen wir eine Fallunterscheidung.

1.Fall $N \in N$: In diesem Fall folgt, direkt $N \notin N$. Dies ist ein Widerspruch.

2.Fall $N \notin N$: In diesem Fall folgt mit $N \in M$, direkt $N \in N$. Auch in diesem Fall liegt ein Widerspruch vor.

Wir schließen, dass die Annahme falsch war und M nicht alle x enthalten kann.