Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014
07.11.2013

4. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz und Bernoullische Ungleichung; 5 Punkte)

Verwenden Sie in dieser Aufgabe keine Induktion.

(a) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(b) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes $(a+b)^n \geq a^n + b^n$.
(c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a, a+b \geq 0$. Zeigen Sie $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

(b) Wir rechnen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \binom{n}{0} \cdot b^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}_{\geq 0} + \binom{n}{n} \cdot a^n \geq b^n \cdot a^n.$$

(c) Der Fall $a = 0$ ist klar. Sei $a \neq 0$. Aus $a + b \geq 0$ folgt $\frac{b}{a} \geq -1$. Wir rechnen mit der Bernoullischen Ungleichung $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n \geq a^n \cdot (1 + n\frac{b}{a}) = a^n + na^{n-1}b$.

Aufgabe H2 (Maxima und Minima; 5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen M_j der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

$$M_0 = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},\ M_1 = \left\{n - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},\ M_2 = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\},\ M_4 = \emptyset$$

Entscheiden Sie jeweils, ob Maximum bzw. Minimum existieren und bestimmen Sie diese im Falle der Existenz.

Lösung: Es ist $\max(M_0) = 1$. In der Tat: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$, also $\frac{1}{n} \leq 1$. Somit gilt $M_0 \leq 1$. Weiterhin gilt $1 = 1$, also $1 \in M_0$. Andererseits hat M_0 kein Minimum, denn angenommen $x \in M_0$ wäre ein Minimum, dann hat x die Gestalt $x = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt aber $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1} \in M_0$.

M_1 hat kein Maximum, da sie nicht nach oben beschränkt ist. Angenommen für $N \in \mathbb{N}$ gelte $N \geq M_1$. Dies kann aber nicht sein, da $(N+1) - \frac{1}{N+1} \in M_1$ und $(N+1) - \frac{1}{N+1} > N$ gelten. Es gilt $\min(M_1) = 0$, denn $0 \in M_1$ und für $n \in \mathbb{N}$ ist $n \geq 1 \geq \frac{1}{n}$ woraus $n - \frac{1}{n} \geq 0$ folgt.

Es gilt $\max(M_2) = \frac{1}{2}$. Offensichtlich gilt $\frac{1}{2} \in M_2$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n ungerade, so gilt $\frac{(-1)^n}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{2}$. Ist n gerade, so gilt $n \geq 2$ und damit $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$. Es gilt $\min(M_2) = -1$. Offensichtlich gilt $-1 \in M_2$. Ist $n \in \mathbb{N}$ so gilt $1 \leq n$ und somit $-1 \leq -\frac{1}{n}$. Es gilt also $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n}$ für ungerade n. Natürlich gilt $-1 \leq \frac{1}{n}$. Insgesammt erhalten wir $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt $\max(M_3) = 1$. Wir haben $1 \in M_3$ und $1 \geq M_3$. M_3 hat kein Minimum. Denn gäbe es ein Minimum hätte es die Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Dies wäre aber keine untere Schranke, denn $\frac{a}{b+1} < \frac{a}{b}$.

Zu M_4: Maximum und Minimum wären, falls existent, Elemente von M_4 . Da M_4 keine Elemente hat, existieren Maximum und Minimum nicht.

Aufgabe H3 (Ein Körper der nicht existiert; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keinen endlichen angeordneten Körper geben kann.

Lösung: Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz.

Lemma. *Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt in einem angeordneten Körper $\sum_{k=1}^{n} 1 > 0$.*

Dies zeigt man mit Induktion nach n. IA: $n = 1$ Aussage entspricht $1 > 0$. IS. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} 1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{>0} + \underbrace{1}_{>0} > 0.$$

Nun können wir die Aussage zeigen. Angenommen es gäbe eine angeordneten Körper K mit $\#K = m < \infty$. Können wir zeigen, dass die Abbildung $\varphi\colon \{1, ..., m+1\} \to K$, $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} 1$ injektiv ist, so sind wir fertig. Seien $n_1, n_2 \in \{1, ..., m+1\}$ mit $\sum_{k=1}^{n_1} 1 = \sum_{k=1}^{n_2} 1$. Angenommen es gilt $n_1 \neq n_2$. Wir nehmen o.B.d.A. $n_1 < n_2$ an. Nun rechnen wir $0 = \sum_{k=1}^{n_2} 1 - \sum_{k=1}^{n_1} 1 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} 1 = \sum_{k=1}^{n_2-n_1} 1$. Zusammen mit $n_2 - n_1 \geq 1$ widerspricht dies aber dem obigen Lemma.

Aufgabe H4 (Eine Ungleichung; 5 Punkte)

(a) Sei $C \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\frac{C}{n} \leq 1$ gilt.
(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $k^n \leq n!$ gilt.

Lösung:

(a) Wir könne $C \in \mathbb{Q}_+$ annehmen. Es gibt also $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $C = \frac{a}{b}$. Wir setzen $n := a$ und erhalten $\frac{C}{n} = \frac{1}{b} \leq 1$.

(b) Wir müssen die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ nachweisen, das $\frac{k^n}{n!} < 1$ erfüllt. Für $n > k+1$ rechnen wir

$$\frac{k^n}{n!} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{k}{n-j} = \prod_{j=0}^{n-k} \frac{k}{n-j} \cdot \prod_{j=n-k+1}^{n-1} \frac{k}{n-j} = \prod_{j=0}^{n-k} \frac{k}{n-j} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{k-1} \frac{k}{k-j}}_{=:C}$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \left(\underbrace{\prod_{j=1}^{n-k} \frac{k}{k-j}}_{\leq 1} \right) \cdot C \leq \frac{k \cdot C}{n}$$

Nach (a) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k \cdot C}{N} \leq 1$. Wählen wir $n = \max(N, k+2)$ so gilt $k^n \leq n!$. Man beachte, dass die Größe C in diesem Beweis nicht von n abhing.