Prof. Dr. Helge Glöckner | Wintersemester 2013/2014
21.11.2013

6. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Fixpunkte von monotonen Funktionen auf $\mathbb{R}$; 5 Punkte)

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = x$. Ein solches x nennt man übrigens Fixpunkt von f. **Hinweis:** Betrachten Sie doch mal den Punkt $z := \sup\{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b, y \leq f(y)\}$.

Lösung: Sei $z := \sup\{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b, y \leq f(y)\}$, das Supremum existiert, da $\mathbb{R}$ vollständign ist. Es gilt offensichtlich $z \in [a, b]$. Wir wollen zu erst $f(z) \geq z$ zeigen.

Wir schreiben $M := \{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b, y \leq f(y)\}$ und rechnen mit der Monotonie von f wie folgt $z \geq M \Rightarrow f(z) \geq f(M)$. Wir erhalten für alle $y \in M$ die Ungleichung $f(z) \geq f(y) \geq y$. Und folgern, dass $f(z)$ eine obere Schranke von M ist. Hiermit erhalten wir $f(z) \geq z$.

Nun wollen wir $z \geq f(z)$ zeigen. Aus $a \leq z \leq b$ folgern wir mit der Monotonie von f die Ungleichung $a \leq f(a) \leq f(z) \leq f(b) \leq b$ und sehen $f(z) \in [a, b]$. Wir wissen bereits $z \leq f(z)$ und folgern aus der Monotonie $f(z) \leq f(f(z))$. Insgesamt erhalten wir also $f(z) \in M$ und folgern $f(z) \leq z$. Dies beendet den Beweis.

Aufgabe H2 (Komplexe Zahlen; 5 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$: $z = \frac{2-5i}{4+3i}$, $z = \left(\frac{4i^{11}-i}{1+2i}\right)^2$.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper sein kann.

(c) Seien $w = u + iv$ und $z = x + iy \neq 0$ mit $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ schreiben Sie $\frac{w}{z}$ in der Form $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(d) Seien $m < n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie $\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a}$ falls $0 < a \leq 1$ und $\sqrt[m]{a} \geq \sqrt[n]{a}$ falls $a \geq 1$

Lösung:

(a) Es gilt

$$z = \frac{(2-5i)(4-3i)}{16+9} = \frac{8-15+i(-20-6)}{25} = -\frac{7}{25} - i\frac{26}{25}.$$

Für die zweite Zahl rechnen wir:

$$z = \left(\frac{4(-i)-i}{1+2i}\right)^2 = \frac{-25}{1+4i-4} = \frac{25 \cdot (3+4i)}{9+16} = 3+4i.$$

(b) Es gilt in jedem angeordnetem Körper $1 > 0$ also auch $-1 < 0$. Zudem haben wir gesehen, dass in einem angeordneten Körper K für $x \in K$ immer $x^2 \geq 0$ gilt. In gilt aber $i^2 = -1$.

(c) Wir rechnen

$$\frac{u+iv}{x+iy} = \frac{u}{x+iy} + i\frac{v}{x+iy} = \frac{u\cdot(x-iy)}{x^2+y^2} + i\frac{v\cdot(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ux-iuy}{x^2+y^2} + i\frac{vx-ivy}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{ux+vy}{x^2+y^2} + i\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

(d) Sei $a \geq 1$, $b, c \in \mathbb{R}_+$ mit $b^m = a$ und $c^n = a$. Aus $a \geq 1$ folgern wir $b, c \geq 1$. Wir wollen $b \geq c$ zeigen. Angenommen es gilt $b < c$. Dann würde auch $b^m < c^m$ und damit $a = b^m < c^m \leq c^m \cdot \underbrace{c^{n-m}}_{\geq 1} = c^n = a$. Dies ist ein Widerspruch.

Sein nun $0 < a \leq 1$, $b, c \in \mathbb{R}_+$ mit $b^m = a$ und $c^n = a$. Aus $a \leq 1$ folgern wir $b, c \leq 1$. Wir wollen $b \leq c$ zeigen. Angenommen es gilt $b > c$. Dann würde auch $b^m > c^m$ und damit $a = b^m > c^m \geq c^m \cdot \underbrace{c^{n-m}}_{\leq 1} = c^n = a$. Dies ist ein Widerspruch.

Aufgabe H3 (Eine weitere Ungleichung; 5 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{y^2}{x} - y + \frac{x^2}{y} - x \geq 0.$$

(b) Zeigen Sie

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Lösung:

(a) Wir nehmen o.B.d.A. $y \geq x$ an ($x \geq y$ geht analog) und rechnen

$$\frac{y^2}{x} - y + \frac{x^2}{y} - x = \left(\frac{y}{x} - 1\right) y + \left(\frac{x}{y} - 1\right) x = \left(\frac{y-x}{x}\right) y + \left(\frac{x-y}{y}\right) x$$
$$= \left(\frac{y-x}{x}\right) y - \left(\frac{y-x}{y}\right) x \geq \left(\frac{y-x}{x}\right) y - \left(\frac{y-x}{y}\right) y$$
$$\geq \left(\frac{y-x}{x}\right) y - \left(\frac{y-x}{x}\right) y = 0.$$

(b) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$: Aus $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y \geq x + y$ folgern wir durch Wurzelziehen $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$: Wir rechnen $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$ und $(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}})^2 = \frac{x^2}{y} + 2\frac{xy}{\sqrt{xy}} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2}{y} + 2\sqrt{xy} + \frac{y^2}{x}$. Es reicht also $x + y \leq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ zu zeigen. Dies folgt aber aus (a).