Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
06.12.2013

8. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Einige Sätz über Zahlenfolgen; 5 Punkte)

(a) Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen z in $\mathbb{C}$ konvergiert, wenn in $\mathbb{R}$ die Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathrm{Re}(z)$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathrm{Im}(z)$ konvergieren. **Hinweis:** Der Einfachheit halber schreiben wir $x_n := \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n := \mathrm{Im}(z_n)$, $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$. Verwenden Sie $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|$.

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = a.$$

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeler Zahlen mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: x$, zeigen Sie, dass auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Lösung:

(a) Es gelte $z_n \to z$. Wir haben $|x_n - x| \le \max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \le |z_n - z| \to 0$ also gilt $x_n \to x$. Analog erhalten wir $y_n \to y$.
Nun gelte $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $|z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y| \to 0$. Wir sehen $z_n \to z$.

(b) Wir setzen $y_n := a - x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|y_n| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N_1$ gilt. Sei $C := \left|\sum_{j=1}^{N_1} y_j\right|$. Wenn wir $N \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass $\frac{C}{n} < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ gilt, so erhalten wir für $n \ge N$

$$\left|a - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{N_1} y_j + \sum_{j=N_1+1}^{n} y_j\right)\right|$$

$$\le \frac{C}{n} + \left|\sum_{j=N_1+1}^{n} y_j\right| \le \varepsilon + \sum_{j=N_1+1}^{n} \underbrace{|y_j|}_{\le\varepsilon} \le \varepsilon + \sum_{j=N_1+1}^{n} \varepsilon \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

(c) Es gilt $c_n - b_n \geq 0$ und $c_n - a_n \geq 0$ also erhalten wir $|c_n - b_n| = c_n - b_n$ und $|c_n - a_n| = c_n - a_n$. Aus $a_n \leq b_n$ folgern wir $-b_n \leq -a_n$ und somit $|c_n - b_n| = c_n - b_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n|$. Hiermit erhalten wir durch Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}|x - b_n| &= |x - c_n + c_n - b_n| \leq |x - c_n| + |c_n - b_n| \leq |x - c_n| + |c_n - a_n| \\ &= |x - c_n| + |c_n - x + x - a_n| \leq |x - c_n| + |c_n - x| + |x - a_n| \to 0\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Einige Zahlenfolgen II; 5 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. **Hinweis:** Beachten Sie bei den komplexen Folgen Aufgabe H1 (a).

(a) $a_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{2^n+1}{3^n}$
(b) $a_n = i^n$
(c) $a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k + \frac{1}{x_k}$, wobei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, \infty[$ ist. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.
(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **Hinweis:**, Verwenden Sie die versteckte Eins $1 = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
(e) $a_n = (\frac{n^3}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, **Hinweis:** Verwenden Sie den Binomischen Lehrsat für $2^n = (1+1)^n$. (Alternativ kann man auch eine Induktion verwenden)

Lösung:

(a) Es gelten $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+n^{-1}} \to \frac{1}{1+0} = 1$ und $\frac{2^n+1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0 + 0 = 0$. Mit H1 (a) erhalten wir $\frac{n}{n+1} + i\frac{2^n+1}{3^n} \to 1$.
(b) Wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, z.B. gegen x, dann muss auch ihr Betrag konvergieren. Es gilt nämlich mit der umgedrehten Dreiecksungleichung $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| \to 0$ ($|x_n|$ konvergiert also gegen $|x|$). Nun gilt

$$|\mathrm{Re}(i^n)| = \begin{cases} 0 & : n \text{ gerade} \\ 1 & : n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir folgern, dass $|\mathrm{Re}(i^n)|$ nicht konvergiert, daher kann $\mathrm{Re}(i^n)$ nicht konvergent sein, und somit auch i^n nicht.
(c) Für $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $0 \geq \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{x^2+1-2x}{x}$ somit erhalten wir $\frac{1}{x} + x \geq 2$. Wir folgern

$$\sum_{k=0}^{n} x_k + \frac{1}{x_k} \geq \sum_{k=0}^{n} 2 \geq n.$$

Es folgt die bestimmte Divergenz gegen ∞.
(d) Wir rechnen

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Um $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ zu zeigen, reicht es $\sqrt{n} \to \infty$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da wir für gegebenens $N \in \mathbb{N}$ einfach $n := N^2$ schreiben und somit $\sqrt{n} \geq N$ erhalten.

(e) Es gilt für $n \geq 4$ die Ungleichung $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$. Hiermit rechnen wir

$$\frac{n^3}{2^n} \leq 24 \cdot \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 24 \cdot \frac{n^3}{n \cdot n(1-n^{-1}) \cdot n(1-2n^{-1}) \cdot n(1-3n^{-1})}$$
$$= \frac{24}{(1-n^{-1}) \cdot (1-2n^{-1}) \cdot (1-3n^{-1})} \cdot \frac{1}{n} \to \frac{24}{1} \cdot 0 = 0.$$

Aufgabe H3 (Folgen und abgeschlossene Mengen II; 5 Punkte)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, sodass für jede Folge (a_k) in A, die gegen ein $a \in X$ konvergiert, bereits $a \in A$ gilt. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

Lösung: Wir zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei dazu $x \in X \setminus A$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Angenommen für jedes $\varepsilon > 0$ gelte $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Insbesondere finden wir dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Die so konstruierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in A und konvergiert gegen x. Nach Voraussetzung muss also $x \in A$ gelten. Dies ist ein Widerspruch.