Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
12.12.2013

# 9. Übungsblatt zur „Analysis I“

## Hausübungen

**Aufgabe H1** (Häufungspunkte II; 5 Punkte)

Bestimmen Sie zu den angegebenen Folgen alle Häufungspunkte und den jeweiligen Limes inferior und superior.

(a) $(\mathrm{Re}(3 \cdot (-1)^n + 6 \cdot i^n))_{n\in\mathbb{N}}$
(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := (\frac{2}{3})^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
(c) $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n$ wie in (b)

**Lösung:**

(a) Wir schreiben $x_n := \mathrm{Re}(3 \cdot (-1)^n + 6 \cdot i^n)$. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Fall 1. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade Zahlen. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $n_k$ gerade ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung.
Fall 1.1. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade Zahlen die durch 4 teilbar sind. Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $n_{k_l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist. Wir erhalten $x_{n_{k_l}} = \mathrm{Re}(3 \cdot (-1)^{n_{k_l}} + 6 \cdot i^{n_{k_l}}) = 3 + 6 = 9$. Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 9 konvergiert.
Fall 1.2. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele gerade Zahlen die nicht durch 4 teilbar sind. Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, sodass $n_{k_l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ nicht durch 4 teilbar ist. Wir erhalten $x_{n_{k_l}} = \mathrm{Re}(3 \cdot (-1)^{n_{k_l}} + 6 \cdot i^{n_{k_l}}) = 3 + 6 \cdot (-1) = -3$. Wir folgern, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 9 konvergiert.
Fall 2. $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ enthält unendlich viele ungerade Zahlen. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $n_k$ ungerade ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $n_k$ ungerade gilt $x_{n_{k_l}} = \mathrm{Re}(3\cdot(-1)^{n_k}+6\cdot i^{n_k}) = 3\cdot(-1) = -3$ Jeder Häufungspunkt der Folge muss also entweder 9 oder $-3$ sein. Die Teilfolge $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die konstante Folgen $(-3)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Teilfolge $(x_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die konstante Folge $(9)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge der Häufungspunkte ist also gegeben durch $\{-3, 9\}$. Zudem erhalten wir $\overline{\lim} x_n = 9$ und $\underline{\lim} x_n = -3$.

(b) Die Folge $(1+(-1)^n)$ ist beschränkt und $(\frac{2}{3})^n$ konvergiert gegen 0. Also konvergiert die Folge $x_n$ gegen 1. Wir erhalten, dass 1 der einzige Häufungspunkt ist und gleich dem Limes inferior und superior.

(c) Es gilt $\frac{x_{n+1}}{x_n} = (\frac{2}{3})^{n+1}(1 + (-1)^{n+1})x_n + \frac{1}{x_n} \to \frac{0}{1} + 1 = 1$. Wir erhalten, dass 1 der einzige Häufungspunkt ist und gleich dem Limes inferior und superior.

**Aufgabe H2** (Eine Anwendung von Teilfolgen; 5 Punkte)

Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen. Die Folge $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in $\mathbb{R}$. Wir schreiben $a := \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Zeigen Sie, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Hinweis:** Führen Sie einen indirekten Beweis und konstruieren Sie eine Teilfolge von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

**Lösung:** Da $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $a > 0$. Angenommen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht divergent. Dann finden wir ein $R \in \mathbb{N}$, sodass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ gibt, mit $q_n \leq R$. Wir wählen eine Teilfolge von $q_n$, sodass alle Folgenglieder der Teilfolge kleiner als $R$ sind. O.B.d.A. schreiben wir wieder $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für diese Teilfolge. Da alle $q_n$ natürliche Zahlen sind folgt, dass die Folge $q_n$ nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{p_n}{q_n} \leq a + 1$. Nach Übergang zu einer Teilfolge nehmen wir also $\frac{p_n}{q_n} \leq a+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an. Wir erhalten $p_n \leq (a+1)\cdot q_n \leq (a+1)R$. Und folgern, dass $p_n$ nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Insgesamt folgern wir, dass $\frac{p_n}{q_n}$ nur enlich viele verschiedene Werte annimmt. Insbesobdere folgern wir, dass $a = \frac{p_n}{q_n}$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $a \in \mathbb{Q}$. Ein Widerspruch.

**Aufgabe H3** (Ganz schön viele Häufungspunkte; 5 Punkte)

(a) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die jede der Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Häufungspunkt hat. **Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis Division mit Rest benutzen.

(b) Wir statten $\mathbb{N}$ mit der Metrik aus die von $\mathbb{R}$ kommt, d.h. wir haben $d(n,m) = |n - m|$. Zeigen, sie, dass es eine Folge in $\mathbb{N}$ gibt, die jede natürliche Zahl zum Häufungspunkt hat.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Folge in $\mathbb{R}$ gibt, die jede reelle Zahl zum Häufungspunkt hat.

**Lösung:**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $r_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sodass es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = q \cdot 5 + r_n$. Wir setzen $x_n := r_n + 1$. Da $x_n$ jede der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ unendlich oft durchläuft, hat sie jede dieser Zahlen als Häufungspunkt. Sie hat natürlich auch keine anderen Häufungspunkte.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $n \in \left[\sum_{j=1}^{k_n} j, \sum_{j=1}^{k_n+1} j\right[$, wir setzen $x_n := n - \sum_{j=1}^{k_n} j$. Wir zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jede natürliche Zahl unendlich oft annnimmt. Seien $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $l < k + 1$ wir wählen $n_1 := l + \sum_{j=1}^{k} j$. Dann gilt $l = x_{n_1}$. Weiter setzen wir $n_2 := l + \sum_{j=1}^{k+1} j$ und erhalten $n_2 \geq n_1$ mit $x_{n_2} = l$. Induktiv erhalten wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die konstant gleich $l$ ist.

(c) Zu nächst zeigen wir, dass jede Umgebung einer reelle Zahl $x$ unendlich viele rationale Zahlen enthält. Wir wissen, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl $q_n \in ]x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1}[ =: A_n$ gibt. Für $N \in \mathbb{N}$ erhalten wir $\dot{\bigcup}_{n\geq N}\{q_n\} \subseteq \dot{\bigcup}_{n\geq N} A_n \subseteq B^{\mathbb{R}}_{\frac{1}{N}}(x)$. Es folgt die Behauptung.

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gibt es eine Surjektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Wir setzten $x_n := \varphi(n)$.

Sei nun $x \in \mathbb{Q}$. Da nach obigem Hilfssatz jede Umgebung von $x$ unendlich viele rationale Zahlen enthält, enthält jede Umgebung von $x$ unendlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist also Häufungspunkt der Folge.