Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
20.12.2013

10. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Einige Reihen II; 5 Punkte)

Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen divergiert, konvergiert bzw. absolut konvergiert. Verwenden Sie weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Lösung:

(a) Durch Erweitern des Bruches mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n^2+n}}$$
$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1+\sqrt{n^2+n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n+\sqrt{2}n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \infty.$$

Es folgt die Divergenz der Reihe nach dem Minorantenkriterium.

(b) Durch Erweitern des Bruches mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+\sqrt{(n+1)^3\cdot n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Da $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass die Folge über die summiert wird positiv ist, und somit, dass die Reihe absolut konvergiert.

(c) Die Reihe divergiert. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Würde die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergieren, so würde auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergieren, dies ist ein Widerspruch.

(d) Mit Hilfe der Bernullischen Ungleichung erhalten wir $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{n})^n \geq 1+1 = 2$ und somit $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{2}$. Wir folgern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe absolut konvergent.

(e) Aus H2, (d) von Blatt 8, wissen wir, dass $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe konvergiert. Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn mit der umgedrehten Dreiecksungleichung folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}}$$
$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \infty.$$

(f) Die absolute Konvergenz der Reihe folgt aus dem Majorantenkriterium und der folgenden Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3}{n^{n-2}}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Aufgabe H2 (Die Summe einer Reihe II; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+\frac{1}{2^n}}{3^n}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

Lösung: Wir rechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+\frac{1}{2^n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{-3}\right)^n + \left(\frac{1}{-6}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{-3}\right)^n\right) - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{-6}\right)^n\right) - 1 = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} - 1 + \frac{1}{1-(-\frac{1}{6})} - 1$$
$$= \frac{3}{4} - 1 + \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = -\frac{11}{28}.$$

Aufgabe H3 (Ein paar theoretische Aufgaben; 5 Punkte)

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\infty[$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ konvergiert.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle monoton fallende Folge, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(c) Seien (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $\alpha \in]0,1[$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. **Hinweis:** Um $d(x_{n+k}, x_n)$ abzuschätzen, können sie k-mal die Dreiecksungleichung anwenden.

Lösung:

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiere. Da alle x_n positiv sind, folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

Die Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium.

Sei nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ konvergent. Wir folgern $\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$. Nun folgt $\left(\frac{1}{x_n}+1\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ und somit $\left(\frac{1}{x_n}\right) \to \infty$. Es folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \leq 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Nun rechnen wir

$$\infty > \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x_n}{1+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} x_n.$$

Die Konvergenzaussage folgt aus dem Majorantenkriterium.

(b) Offensichtlich muss für alle Folgenglieder $x_n \geq 0$ gelten, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{j=N}^{n} x_j < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Zudem gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $N_2 \geq N$, sodass $N \cdot x_n < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$ gilt. Nun erhalten mit der Monotonie von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wir für $n \geq N_2$

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{j=N}^{n} x_j \geq \sum_{j=N}^{n} x_n \geq \sum_{j=N}^{n-1} x_n = (n-N)x_n.$$

Es folgt $nx_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + Nx_n \leq \varepsilon$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Da $\alpha < 1$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha^{n-1} \cdot d(x_1,x_2) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, gilt. Seien nun $n \geq N$ und $k \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}$ gilt nun $d(x_{n+l}, x_{n+l+1}) \leq \alpha^l d(x_n, x_{n+1})$. Zudem gilt $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2)$. Nun rechnen wir

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{l=0}^{k-1} d(x_{n+l}, x_{n+l+1}) \leq \sum_{l=0}^{k-1} \alpha^l d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l$$
$$\leq \alpha^{n-1} d(x_1, x_2) \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l < \varepsilon.$$