Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
28.11.2013

11. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Trigonometrie II; 5 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Darstellung von $cos^4(x)$ als Summe von Termen der Form $k \cdot \cos(lx)$ mit $k, l \in \mathbb{Q}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, finden Sie eine Darstellung von $cos^n(x)$ als Summe von Termen der Form $k \cdot \cos(lx)$ mit $k, l \in \mathbb{Q}$.

Lösung:

(a) Wir rechnen

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(e^{ix})^{4-k}(e^{-ix})^k$$
$$= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 4\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

(b) Wir erhalten

$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x}.$$

Wir wissen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \geq k$. Für n ungerade ist $n-1$ gerade und wir erhalten

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n-k}e^{i(n-2(n-k))x}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x).$$

Für n gerade erhalten wir

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x} + \binom{n}{n-k}e^{i(n-2(n-k))x} + \binom{n}{\frac{n}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} + \frac{1}{2^n}\cdot\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)x) + \frac{1}{2^n}\cdot\binom{n}{\frac{n}{2}}.$$

Aufgabe H2 (Wurzel- bzw. Quotientenkriterium II; 5 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}$ sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium auf Konvergenz.

(b) Nach Bemerkung III.4.11. aus dem Skript divergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Untersuchen Sie, ob dies auch dann schon gilt, wenn $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Lösung:

(a) Es gilt $\frac{1}{2^k \cdot 2} \leq a_k \leq \frac{2}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir folgern $\frac{1}{2\cdot\sqrt[k]{2}} \leq \sqrt[k]{a_k} \leq \frac{\sqrt[k]{2}}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch Übergang zum Grenzwert erhalten wir mit $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2} = 1$ die Gleichung $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2} < 1$. Es folgt die absolute Konvergenz aus dem Wurzelkriterium. Es gilt $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1-1}} = 2$. Es folgt $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 2$. Das Quotientienkriterium ist nicht anwendbar.

(b) Offenbar ist dies nicht der Fall, siehe Teil (a).

Aufgabe H3 (Potenzreihe II; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass man für $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ als Potenzreihe auffassen kann und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Liegt auch auf dem Rand des Konvergenzkreises Konvergenz vor?

Lösung: Wir setzen

$$a_n := \begin{cases} 1 \text{ wenn } (\exists k \in \mathbb{N})\ n = k! \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} = \sum_{n=0} a_n z^n$. Die Häufungspunkte der Folge $\sqrt[n]{a_n}$ sind 0 und 1. Somit ist der Konvergenzradius 1.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $(z^{k!})_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, da $|z^{k!}| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit liegt auf dem Rand keine Konvergenz vor.

Aufgabe H4 (Cauchyprodukte; 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, die Gleichungen

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k \text{ und } \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k.$$

Hinweis: Bilden Sie Cauchyprodukte mit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

(b) Berechnen Sie mit (a) die Summen

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} z^l z^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot z^k.$$

Zudem erhalten wir

$$\frac{2}{(1-z)^3} = 2\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot z^k\right) = 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(l+1)z^l z^{k-l}$$

$$=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} z^k\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^k.$$

(b) Mit (a) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^3} - 2 = 8-2=6.$$