

2. Übungsblatt zu „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 4 (Produkttopologie)

Seien X_1, X_2 topologische Räume. Zeigen Sie:

- (a) Aus X_1 und X_2 Hausdorffsch folgt $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie ist Hausdorffsch.
- (b) Wenn X_1 die abzählbare Basis $\mathcal{B}_1$ und X_2 die abzählbare Basis $\mathcal{B}_2$ für die jeweilige Topologie hat, dann hat auch $X_1 \times X_2$ eine abzählbare Basis für die Produkttopologie.
- (c) Seien $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ und $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann ist die Abbildungen

$$f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig (bzw. ein Homöomorphismus), wenn f_1 und f_2 stetig (bzw. Homöomorphismen) sind.

- (d) Für zwei Teilmengen $U_1 \subseteq X_1$ und $U_2 \subseteq X_2$ stimmt auf $U_1 \times U_2$ die von $X_1 \times X_2$ induzierte Topologie mit der Produkttopologie von $U_1 \times U_2$ (je mit der induzierten Topologie) überein.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass zwei Topologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ auf X genau dann gleich sind, wenn $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ ein Homöomorphismus ist.

- (e) Seien X_1, X_2 topologische Mannigfaltigkeiten, dann ist auch $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie eine topologische Mannigfaltigkeit.

Lösungsvorschlag: (a) Seien X_1 und X_2 Hausdorffsch und $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. OBdA gilt $x_1 \neq y_1$. Da X_1 Hausdorffsch ist, existieren disjunkte Umgebungen U von x_1 und V von y_1 . Dann sind $U \times X_2$ und $V \times X_2$ disjunkte Umgebungen von (x_1, x_2) bzw. (y_1, y_2) .

(b) Nach der Vorlesung ist $\mathcal{B} := \{U \times V : U \in \mathcal{B}_1, V \in \mathcal{B}_2\}$ eine Basis der Produkttopologie und diese ist abzählbar, da das Produkt zweier abzählbaren Mengen abzählbar ist.

(c) Es genügt zu zeigen, dass das Urbild von Basismengen offen ist. Seien also $U \subseteq X_2$ und $V \subseteq Y_2$ offen, dann gilt $(f_1 \times f_2)^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \times f_2^{-1}(V)$. Da die Urbilder je offen sind, ist diese Menge eine Basismenge der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$. Falls f_1 und f_2 Homöomorphismen sind, ist die Umkehrabbildung von $(f_1 \times f_2)$ durch $(f_1^{-1} \times f_2^{-1})$

gegeben und ein analoges Argument zeigt die Aussage.

(d) Der Hinweis ist offensichtlich. Zeige also, dass

$$\text{id}: (U_1 \times U_2, \mathcal{O}_{\text{prod}}) \rightarrow (U_1 \times U_2, \mathcal{O}_{\text{ind}})$$

ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung id ist stetig, genau dann, wenn sie als Abbildung nach $X_1 \times X_2$ stetig ist. Wir sind also in der Situation von (c) mit dem Produkt der Inklusionen, welche je stetig sind. Umgekehrt ist id^{-1} stetig, genau dann wenn die Komponentenabbildungen stetig sind. Eine Abbildung nach U_1 ist stetig, genau dann wenn sie stetig nach X_1 ist und die Projektion $\pi_1: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ ist stetig. Also ist auch die Einschränkung $(\text{id}^{-1})_1 = \pi_1|_{U_1 \times U_2}$ stetig (analog für U_2).

(e) Seien X_1, X_2 topologische Mannigfaltigkeiten und $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Dann gibt es offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i und Homöomorphismen $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ in offene Mengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ für $i \in \{1, 2\}$. Die Abbildung

$$\varphi_1 \times \varphi_2: U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

ist ein Homöomorphismus nach (c), weil es nach (d) keine Rolle spielt ob wir die induzierte oder die Produkttopologie auf dem Werte- und Definitionsbereich betrachten. Nach (a) ist $X_1 \times X_2$ zusätzlich Hausdorffsch und demnach eine topologische Mannigfaltigkeit.

Aufgabe G 5 (Quotiententopologie)

Sei X ein topologischer Raum und $q: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir versehen Y mit der finalen Topologie bzgl. q . Diese Topologie wird auch *Quotiententopologie* genannt. Zeigen Sie:

- (a) Eine Teilmenge von Y ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn ihr Urbild unter q offen (bzw. abgeschlossen) ist.
- (b) Sei nun Z ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow Z$ eine stetige, surjektive und offene Abbildung (d.h. $f(U) \subseteq Z$ offen für alle $U \subseteq X$ offen), dann ist die Topologie auf Z die Quotiententopologie bzgl. f .
- (c) Die von $\mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ entspricht der Quotiententopologie bzgl.

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

Lösungsvorschlag: (a) Für offene Mengen gilt dies per Definition. Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen, d.h. das Komplement A^c ist offen. Es folgt, dass $q^{-1}(A^c) = (q^{-1}(A))^c$ offen ist und somit ist $q^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen. Die umgekehrte Argumentation liefert die andere Richtung.

(b) Zu zeigen ist, dass $U \subseteq Z$ offen ist, genau dann wenn $f^{-1}(U)$ offen ist. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(U)$ für offenes $U \subseteq Z$ automatisch offen. Sei umgekehrt $f^{-1}(U)$ offen. Wegen der Surjektivität gilt $f(f^{-1}(U)) = U$. Also ist U offen, da f eine offene Abbildung ist.

(c) Da die Abbildung k offensichtlich surjektiv und stetig ist genügt es nach (b) zu zeigen, dass sie eine offene Abbildung ist. Eine Abbildung ist offen, genau dann wenn sie alle Mengen einer Basis der Topologie auf offene Mengen abbildet (die eine Richtung ist trivial, für die andere Richtung sei $g: X \rightarrow W$ eine Abbildung, $\mathcal{B}$ eine Basis von X und $U \subseteq X$ offen. Dann gilt $g(U) = g(\bigcup_{V \in \mathcal{B}, V \subseteq U} V) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}, V \subseteq U} g(V)$ und somit ist das Bild offen). Man sieht leicht, dass die Menge aller offenen Intervalle der Länge kleiner als 2π eine Basis von $\mathbb{R}$ bilden (da sich jedes offene Intervall leicht als Vereinigung solcher Intervalle schreiben lässt). Sei $I := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ so ein Intervall, dann ist $k|_I$ nicht surjektiv (da die kleinste Periode von k durch 2π gegeben ist) und $k(a) \neq k(b)$. Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die Linie durch $k(a)$ und $k(b)$. Weil $k(I)$ zusammenhängend ist, liegen alle Bildpunkte genau auf einer Seite von L . Sei $H \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch diese Seite definierte offene Halbebene. Wir erhalten $H \cap \mathbb{S}_1 = k(I)$, was den Beweis beendet.