Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
03.11.2014

3. Übungsblatt zu „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 6 (Atlanten)

Sei M eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen Atlas $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $(\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi) \in \mathcal{A}$ und $U \subseteq U_\varphi$ offen. Dann gilt $(\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)) \in \mathcal{A}$.

(b) Sei $W \subseteq M$ offen. Dann ist W eine C^k-Mannigfaltigkeit mit dem maximalen Atlas $\mathcal{A}_W := \{\varphi \in \mathcal{A} : U_\varphi \subseteq W\}$.

Lösungsvorschlag: (a) Offensichtlich ist $\varphi|_U$ ein Homöomorphismus und $\varphi(U)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$. Zeige also, dass $\varphi|_U \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi|_U^{-1}$ für alle $\psi \in \mathcal{A}$ C^k-Abbildungen sind. Nun gilt aber $\varphi|_U \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(\varphi^{-1}(U))}$ und $\psi \circ \varphi|_U^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ und da Einschränkungen von C^k-Abbildungen (zwischen Vektorräumen) auf offene Mengen C^k sind, ist die Aussage bewiesen.
(b) Nach (a) erhält man durch Einschränken auf W um jeden Punkt eine Karte in $\mathcal{A}_W$ und da $\mathcal{A}_W \subseteq \mathcal{A}$ gilt sind alle Kartenwechsel C^k. Sei $\mathcal{A}_{W,max}$ der von $\mathcal{A}_W$ erzeugte maximale Atlas von W. Zeige $\mathcal{A}_{W,max} \subseteq \mathcal{A}_W$. Sei also $\psi \in \mathcal{A}_{W,max}$. Wenn wir zeigen können, dass $\psi \in \mathcal{A}$ gilt, ist der Beweis beendet (da der Definitionsbereich von ψ in W liegt). Für ein $\varphi \in \mathcal{A}$ und alle $\phi \in \mathcal{A}_W$ gilt $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \varphi^{-1})$ und beide Terme auf der rechten Seite sind nach der Definition von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_W$ C^k-Abbildungen. Das gleiche Argument für $\varphi \circ \psi^{-1}$ zeigt, dass der Kartenwechsel von ψ mit jeder Karte aus $\mathcal{A}$ C^k ist (da sich um jeden Punkt in W eine Karte aus $\mathcal{A}_W$ einschieben lässt) und demnach gilt $\psi \in \mathcal{A}$.

Aufgabe G 7 (Graphen)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine C^∞-Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit.

(b) $\operatorname{graph}(f)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Lösungsvorschlag: (a) Wir konstruieren eine Karte $\varphi\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$, sodass

$$\varphi(\mathbb{R}^{n+m} \cap \operatorname{graph}(f)) = (\mathbb{R}^n \times 0) \cap \varphi(\mathbb{R}^{n+m}) \tag{1}$$

gilt. Wir definieren also

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad (x,y) \mapsto (x, y - f(x)).$$

Diese Abbildung erfüllt offensichtlich (1) und ist glatt und bijektiv, mit der ebenfalls glatten Umkehrabbildung $\varphi^{-1}(x,y) := (x, y + f(x))$.
(b) Wir definieren

$$\pi\colon \operatorname{graph}(f) \to \mathbb{R}^n, \quad (x, f(x)) \mapsto x.$$

Die Abbildung π ist die Einschränkung der glatten Abbildung $\pi_1\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ auf eine Untermannigfaltigkeit und demnach glatt. Andererseits ist eine Abbildung in die Untermannigfaltigkeit $\operatorname{graph}(f)$ von $\mathbb{R}^{n+m}$ genau dann glatt, wenn sie als Abbildung nach $\mathbb{R}^{n+m}$ glatt ist. Somit ist $\pi^{-1}(x) := (x, f(x))$ glatt.

Aufgabe G 8 (Verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen)

Gegeben sei $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie. Wir definieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \qquad \text{und} \\ \phi_2 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 = \{\phi_1\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\phi_2\}$ je C^∞-Atlanten für $\mathbb{R}$ sind, dass aber $\mathcal{A}_3 = \{\phi_1, \phi_2\}$ kein C^∞-Atlas ist (d.h. es gibt keinen maximalen C^∞-Atlas, der ϕ_1 und ϕ_2 enthält). Zeigen Sie weiter, dass es einen Diffeomorphismus

$$\Phi\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$$

gibt.

Lösungsvorschlag: Beide Abbildungen sind offensichtlich stetig und bijektiv, demnach ist die Umkehrabbildung auch stetig. Da die Abbildungen globale Karten sind, ist der Kartenwechsel je die Identität und somit glatt. Zeige nun, dass der Kartenwechsel $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ nicht glatt ist. Es gilt $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ für $x \geq 0$ und $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(x) = -\sqrt[3]{-x} + 1$ sonst. Diese Abbildung ist in 0 offensichtlich nicht differenzierbar.
Als Diffeomorphismus definieren wir

$$\Phi\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), \quad x \mapsto x^3 - 1.$$

Dann gilt $(\phi_2 \circ \Phi \circ \phi_1^{-1})(x) = x$ und somit ist Φ glatt. Man rechnet sofort nach, dass auch $(\phi_1 \circ \Phi^{-1} \circ \phi_2^{-1})(x) = x$ gilt, also ist Φ ein Diffeomorphismus.