

5. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 11 (Faserprodukt)

Sei $M_1 := M_2 := N := \mathbb{R}$ weiter setzen wir $f: M_1 \rightarrow N, x \mapsto x^2$ und $g: M_2 \rightarrow N, y \mapsto y^2$. Zeigen Sie, dass das Faserprodukt

$$M_1 \times_N M_2 = \{(x, y) \in M_1 \times M_2 : f(x) = g(y)\}$$

keine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz über Faserprodukte aus der Vorlesung?

Lösungsvorschlag: Beide Abbildungen sind keine Submersion, da ihre Ableitung in 0 verschwindet und demnach ist der Satz über Faserprodukte nicht anwendbar. Es gilt

$$M_1 \times_N M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ oder } x = -y\}.$$

Es ist offensichtlich, dass falls $M_1 \times_N M_2$ eine Untermannigfaltigkeit wäre, sie eindimensional sein muss.

1. Möglichkeit (Zusammenhangskomponenten): Gäbe es eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi: U \rightarrow V$ um $(0, 0)$, so können wir annehmen, dass ihr Bild (evtl. nach Verkleinern des Definitionsbereiches) ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Insbesondere nehmen wir also an, dass U zusammenhängend ist. Offensichtlich ist $\varphi|_{U \setminus \{(0,0)\}}$ ein Homöomorphismus. Nun hat aber $U \setminus \{(0, 0)\}$ vier Zusammenhangskomponenten und $V \setminus \{\varphi(0, 0)\}$ nur zwei Zusammenhangskomponenten. Dies ist ein Widerspruch, da Homöomorphismen Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten abbilden.

2. Möglichkeit (Dimension des Tangentialraums): Definiere

$$\gamma_1:]-1, 1[\rightarrow M_1 \times_N M_2, \quad t \mapsto (t, t) \text{ und } \gamma_2:]-1, 1[\rightarrow M_1 \times_N M_2, \quad t \mapsto (t, -t).$$

Es gilt $\gamma_1'(0) = (1, 1)$ und $\gamma_2'(0) = (1, -1)$. Die Dimension des geometrischen Tangentialraums in $(0, 0)$ müsste also zwei sein, was im Widerspruch zur Dimension in jedem anderen Punkt steht.

Aufgabe G 12 (Untermannigfaltigkeiten)

Seien M, L C^k -Mannigfaltigkeiten und $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- (a) Eine Abbildung $f: L \rightarrow N$ ist genau dann C^k , wenn sie als Abbildung nach M C^k ist.

(b) Sei $g: M \rightarrow L$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $g(N)$ eine Untermannigfaltigkeit von L .

(c) Die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in M\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ und $\text{pr}_1: \Delta \rightarrow M$, $(x, x) \mapsto x$ ist eine Submersion.

Lösungsvorschlag: (a) Sei $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte von M , die eine Untermannigfaltigkeitskarte $\varphi_N: U \cap N \rightarrow V_N$ induziert. Sei weiter $\psi: U' \rightarrow V'$ eine Karte von L . Angenommen f ist C^k als Abbildung nach M , d.h. $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ ist C^k . Dann ist auch $\varphi_N \circ f \circ \psi^{-1} = \text{pr}_1 \circ \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ eine C^k -Abbildung und somit ist f C^k als Abbildung nach N . Sei umgekehrt f als Abbildung nach N C^k , d.h. $\varphi_N \circ f \circ \psi^{-1}$ ist C^k . Dann folgt, dass auch

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} = i \circ \varphi_N \circ f \circ \psi^{-1}$$

C^k ist (wobei i die Inklusion der entsprechenden Vektorräume ist). Demnach ist f als Abbildung nach M C^k .

(b) Sei φ wie in (a). Da g ein Diffeomorphismus ist, ist $\varphi \circ g^{-1}$ eine Karte von L und wir erhalten $\text{pr}_1 \circ \varphi \circ g^{-1}|_{g(N)} = \varphi_N \circ g^{-1}$, was offensichtlich eine Untermannigfaltigkeitskarte für $g(N)$ definiert.

(c) Mit dem Satz über Faserprodukte: Da $\text{id}: M \rightarrow M$ eine Submersion ist und $\Delta = M \times_M M$ gilt, folgen beide Aussagen sofort aus dem Satz über Faserprodukte.

Ohne den Satz über Faserprodukte: Sei $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von M , dann ist

$$\varphi \times \varphi: U \times U \rightarrow V \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$$

eine Karte von $M \times M$. Aus dieser konstruieren wir nun eine Untermannigfaltigkeitskarte. Definiere dazu den Diffeomorphismus (da linearer Isomorphismus)

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto (v, w - v).$$

Dann ist auch die Einschränkung $g': V \times V \rightarrow g(V \times V)$, $g'(v, w) := g(v, w)$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und demnach ist

$$\phi: U \times U \rightarrow g(V \times V), \quad (x, y) \mapsto (g' \circ \varphi)(x, y)$$

eine Karte von $M \times M$. Per Definition haben wir $\phi(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x) - \varphi(x))$ für $(x, x) \in U \cap \Delta$ und demnach gilt $\phi(U \cap \Delta) = g(V \times V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ wie gefordert.

Für jeden Tangentialvektor $[\gamma] \in T_x M$ ist $[\gamma, \gamma] := [t \mapsto (\gamma(t), \gamma(t))]$ ein Tangentialvektor in $T_{(x,x)} \Delta$ und man sieht sofort, dass $T_{(x,x)} \text{pr}_1([\gamma, \gamma]) = [\gamma]$ gilt. Somit ist $T_{(x,x)} \text{pr}_1$ für jedes $(x, x) \in \Delta$ surjektiv.

Aufgabe G 13 (Spezielle lineare Gruppe)

(a) Zeigen Sie, dass $\det: \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Submersion ist.

Hinweis: Überlegen Sie, dass es genügt zu zeigen, dass die Richtungsableitung der Determinante in *eine* Richtung nicht verschwindet und wählen Sie eine geschickte Richtung. Alternativ lässt sich die Ableitung der Determinante in einem beliebigen Punkt auf die Ableitung der Determinante in $\mathbb{1}$ zurückführen.

(b) Zeigen Sie, dass die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit der $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist.

Lösungsvorschlag: (a) Wir fassen $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ auf, es genügt also die gewöhnliche Ableitung der Determinante zu betrachten. Ist diese an jedem Punkt in eine Richtung ungleich 0 so folgt, dass die Tangentialabbildung surjektiv sein muss, da der Tangentialraum von $\mathbb{R}$ in jedem Punkt eindimensional ist. Sei $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Richtungsableitung in A in Richtung A und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + tA) - \det(A)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^n \det(A) - \det(A)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^n - 1^n}{t} \det(A) \\ &= n \cdot \det(A) \neq 0. \end{aligned}$$

Alternativ gilt für ein beliebiges $B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + tB) - \det(A)}{t} = \det(A) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) - \det(\mathbb{1})}{t}$$

und somit genügt es die Ableitung in der Identität zu bestimmen. Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Ableitung in $\mathbb{1}$ in Richtung B genau die Spur von B ist. Es ist leicht ein B zu finden, sodass $\mathrm{tr}(A^{-1}B) \neq 0$ gilt (z.B. $B := A$), was den Beweis beendet.

(b) Es gilt $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ und nach (a) ist $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ also eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.