Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
8.12.2014

# 8. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G 20** (Differentialgleichung)

Sei $M := \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis.

(a) In der Aufgabe G10 (Zettel 4) wurde gezeigt, dass

$$f : \mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

eine étale Abbildung ist. Begründen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrfunkltion $\varphi := (f|_{]x,x+2\pi[})^{-1}$ eine Karte definiert und diese Karten einen Atlas von $M$ bilden.

(b) Wie in Aufgabe G9 identifizieren wir $T_{(x,y)}M$ mit dem geometrischen Tangentialraum $\mathcal{T}_{(x,y)}M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \langle (u, v), (x, y)\rangle = 0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$X : M \to TM, \quad (x, y) \mapsto (-y, x) \in \mathcal{T}_{(x,y)}M$$

ein glattes Vektorfeld definiert.

(c) Skizzieren Sie das Vektorfeld $X$.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot\gamma = X(\gamma)$, $\gamma(0) = (0, 1)$.

**Lösungsvorschlag:** (a) Bekanntlich ist $f|^{-1}_{]x,x+2\pi[}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ injektiv. Da $f$ als étale Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $f$ insbesondere eine offene Abbildung. Daraus folgt, dass die Einschränkung ein Diffeomorphismus und somit eine Karte ist. Offensichtlich überdecken die Karten dieser Form $M$ also bilden sie einen Atlas.
(b) Für $x \in \mathbb{R}$ und $\varphi := f|^{-1}_{]x,x+2\pi[}$ betrachten wir

$$T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} = T\varphi \circ X \circ f|_{]x,x+2\pi[}.$$

Es gilt $X(f(t)) = X(\cos(t), \sin(t))$. Dieser Punkt wird nun auf $[\gamma] \in TM$ mit der Eigenschaft $\gamma(0) = (\cos(t), \sin(t))$ und $\gamma'(0) = (-\sin(t), \cos(t))$ abgebildet. Dies ist für $\gamma(s) := (\cos(t + s), \sin(t + s))$ erfüllt. Damit folgt $T\varphi[\gamma] = ((\cos(t), \sin(t)), (t + s)'(0)) = ((\cos(t), \sin(t)), 1)$. Also ist $X$ glatt.
(d) Sei $\varphi := f|^{-1}_{]0,\pi[} = \arccos \circ \mathrm{pr}_1$. In dieser Karte erhalten wir die Differentialgleichung

$$1 = \mathrm{pr}_2(T\varphi \circ X \circ \gamma)(t) = X_\varphi(\varphi \circ \gamma)(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t) = (\arccos \circ \gamma_1)'(t).$$

Es folgt $\arccos \circ \gamma_1(t) = t + c$, d.h. $\gamma_1(t) = \cos(t + c)$. Wegen $\gamma_1(0) = 0$ muss $c = \frac{\pi}{2}$ gelten. Insgesamt erhalten wir also $\gamma(t) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2}))$, da die Kurve in $M$ liegen muss. Durch analoges Vorgehen mit einer Karte um z.B. $x := (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (mit dem passenden Anfangswertproblem) usw. erhalten wir nun stückweise die gesamte Lösung $\gamma(t) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2}))$.

**Aufgabe G 21** (Verknüpfte Vektorfelder)

(a) Sei $f\colon N \to M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $Y\colon M \to TM$, $X\colon N \to TN$ Vektorfelder, die über $f$ verknüpft sind. Zeigen Sie, dass falls $\gamma\colon I \to N$ eine Lösung für $\dot\gamma = X(\gamma)$ ist, $(f\circ\gamma)^{\cdot} = Y(f\circ\gamma)$ folgt. Zeigen Sie weiter, dass wenn $f$ étale ist, auch die Umkehrung gilt.

(b) Seien $f$ und $X$ wie in Aufgabe G20. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial t}\colon \mathbb{R} \to T\mathbb{R}$ und $X$ durch $f$ verknüpft sind.

(c) Lösen Sie $\dot\gamma = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma)$.

**Lösungsvorschlag:** (a) Sei $\gamma\colon I \to N$ eine Lösung von $\dot\gamma = X(\gamma)$. Mit der Kettenregel gilt nun

$$(f\circ\gamma)^{\cdot}(t) = Tf \circ T\gamma(t,1) = Tf \circ X(\gamma)(t) = Y \circ f \circ \gamma(t),$$

da $Y \circ f = Tf \circ X$. Ist $f$ étale, so folgt, dass $T_x f$ für jedes $x \in N$ invertierbar ist und für alle $t \in I$ gilt also $Tf \circ T\gamma(t,1) = Tf \circ X(\gamma)(t)$ genau dann, wenn $T\gamma(t,1) = X(\gamma)(t)$.
(b) Wir benutzen die Identifikation mit dem geometrischen Tangentialraum, wie in G20(b). D.h. $X \circ f(x) = (-\sin(x), \cos(x)) \in \mathcal{T}_{(\cos(x),\sin(x))}M$. Weiter gilt $\frac{\partial}{\partial t}(x) = [\gamma]$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = 1$ und somit

$$Tf \circ \frac{\partial}{\partial t}(x) = (f\circ\gamma(0), (f\circ\gamma)'(0)) = ((\cos(x), \sin(x)), (-\sin(x), \cos(x))),$$

unter der Identifikation mit dem geometrischen Tangentialraum. Es folgt $Tf \circ \frac{\partial}{\partial t}(x) = X \circ f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(c) Wegen (a) und (b) wissen wir, dass $(f\circ\gamma)^{\cdot} = X(\gamma)$, genau dann wenn $\dot\gamma = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma)$. Aus der Rechnung von G20(d) erhalten wir sofort $\gamma(t) = (t + c)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Umgekehrt hätte man diese Lösung auch direkt mit der Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten können und dann G20(d) durch $f \circ \gamma$ lösen können.