Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
15.12.2014

9. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 22 (Vollständige Vektorfelder)

(a) Mit der Identifikation $T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ definieren wir das Vektorfeld

$$X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad y \mapsto (y, y^2).$$

Zeigen Sie, dass X nicht vollständig ist.

(b) Sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Wir definieren ein sogenanntes lineares Vektorfeld

$$Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n} \cong T\mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x, Ax).$$

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld Y vollständig ist, der Fluss Φ also auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist. Geben Sie den Diffeomorphismus $\Phi_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ konkret an.

Lösungsvorschlag: (a) Mit der globalen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erhalten wir die Differentialgleichung $\gamma' = \gamma^2$. Wir bestimmen die Lösung für den Anfangswert $\gamma(0) = a \neq 0$. Mit der Methode der getrennten Variablen rechnen wir also

$$\int_a^{\gamma(t)} \frac{1}{y^2} dy = \int_0^t dy$$

und erhalten $-\frac{1}{\gamma(t)} + \frac{1}{a} = t$. Es folgt $\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{a} - t}$ und somit gilt für das maximale Lösungsintervall $I_a =]-\infty, \frac{1}{a}[$, falls $a > 0$ und $I_a =]\frac{1}{a}, \infty[$, falls $a < 0$.
(b) Mit der globalen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ erhalten wir die Differentialgleichung $\gamma' = A\gamma$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung und für jeden Anfangswert $\gamma(0) = a \in \mathbb{R}^n$ ist bekanntlich $e^{tA}a$ eine Lösung, die offensichtlich für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Also ist Y vollständig. Wir erhalten für jedes $t \in \mathbb{R}$ den Diffeomorphismus $\Phi_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto e^{tA}x$ (e^{tA} ist invertierbar).

Aufgabe G 23 (Derivationen)

Sei A eine Algebra. Zeigen Sie, dass der Raum der Derivationen $\mathrm{der}(A)$ ein Untervektorraum des Raumes aller linearen Endomorphismen $\mathrm{Lin}(A, A)$ ist.

Lösungsvorschlag: Es ist klar, dass die Nullabbildung eine Derivation ist. Seien $f, g \in \mathrm{der}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $f + \lambda g$ ebenfalls eine Derivation ist. Für $a, b \in A$ rechnen wir

$$(f + \lambda g)(ab) = f(ab) + \lambda g(ab) = f(a)b + af(b) + \lambda(g(a)b + ag(b)) =$$

$$(f(a) + \lambda g(a))b + a(f(b) + \lambda g(b)) = (f + \lambda g)(a)b + a(f + \lambda g)(b).$$

Aufgabe G 24 (Lie-Klammer)
Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\varphi\colon U \to V$ eine Karte und $X, Y : U \to TU$ die Vektorfelder

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\varphi \quad \text{und } Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\varphi$$

(a) Berechnen Sie $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ für die zugehörigen Differentialoperatoren $\mathcal{L}_X$ und $\mathcal{L}_Y$ (also $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f)$ für glatte Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$) und begründen Sie, dass das Ergebnis wieder eine Derivation ist.

(b) Zeigen Sie $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\varphi, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_\varphi\right] = 0.$

(c) Berechnen Sie $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ für $X, Y\colon \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$, wobei $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und

$$X := x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\varphi + x(y+1)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_\varphi \quad \text{und } Y := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\varphi + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_\varphi .$$

Lösungsvorschlag: (a) Es gilt

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) = \mathcal{L}_X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}}{\partial x_i} \circ \varphi =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}\right)\circ\varphi.$$

Analog erhalten wir

$$\mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}\right)\circ\varphi.$$

Da sich die Terme mit den gemischten Ableitungen gegenseitig aufheben, ergibt dies insgesamt

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\right)\circ\varphi =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\right)\circ\varphi.$$

Es handelt sich also wieder um eine Derivation.
(b) Dies folgt leicht direkt oder aus der Formel von oben, da in jedem Summand die partielle Ableitung der Koeffizientenfunktion als Faktor vorkommt. Da diese hier entweder

konstant Null bzw. Eins sind, verschwindet die gesamte Summe.
(c) Eingesetz ergibt sich für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} - (y+1)\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}.$$