Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
5.1.2015

10. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie"

Gruppenübungen

Aufgabe G 25 (Verknüpfte Vektorfelder und Lie-Algebren Morphismen)

Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus von glatten Mannigfaltigkeiten.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes Vektorfeld X auf M genau ein Vektorfeld Y auf N gibt, sodass X mit Y über f verknüpft ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung aus (a) ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist.

Lösungsvorschlag: (a) Es muss also $Y \circ f = Tf \circ X$ gelten. Da f ein Diffeomorphismus ist, gilt dies genau dann, wenn $Y = Tf \circ X \circ f^{-1}$. Damit existiert Y und ist eindeutig festgelegt.
(b) Wir betrachten also die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N), \quad X \mapsto Tf \circ X \circ f^{-1}.$$

Wegen der Kettenregel sieht man sofort, dass $Y \mapsto T(f^{-1}) \circ Y \circ f$ eine Umkehrabbildung zu Φ definiert und somit ist Φ bijektiv. Linearität erhalten wir punktweise mit

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda X_1 + X_2)(x) &= Tf(\lambda X_1 + X_2)(f^{-1}(x))\\ &= T_{f^{-1}(x)}f(\lambda X_1(f^{-1}(x)) + X_2(f^{-1}(x)))\\ &= \lambda T_{f^{-1}(x)}f\big(X_1(f^{-1}(x))\big) + T_{f^{-1}(x)}f\big(X_2(f^{-1}(x))\big)\\ &= \lambda\Phi(X_1)(x) + \Phi(X_2)(x)\end{aligned}$$

für $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in N$, da Tf faserweise linear ist. Zuletzt zeigen wir noch, dass Φ die Lie-Klammer erhält. D.h.

$$[Tf \circ X_1 \circ f^{-1}, Tf \circ X_2 \circ f^{-1}] = Tf \circ [X_1, X_2] \circ f^{-1}.$$

Dies folgt sofort, da X_i mit $Y_i := Tf \circ X_i \circ f^{-1}$ über f verknüpft ist und somit auch $[Y_1, Y_2]$ über f mit $[X_1, X_2]$ verknüpft ist. Ein analoges Argument zeigt, dass auch die Umkehrfunktion die Lie-Klammer erhält.

Aufgabe G 26 (Zentrum einer Lie-Algebra)

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Wir definieren das Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ als

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} : (\forall y \in \mathfrak{g})[x, y] = 0\}.$$

Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der glatten Vektorfelder auf $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Was lässt sich für das Zentrum der glatten Vektorfelder über $\mathbb{R}^n$ sagen? Was gilt für Vektorfelder die nur auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind?

Lösungsvorschlag: Mit der Identifikation $T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ hat jedes glatte Vektorfeld Z auf $\mathbb{R}$ die Gestalt $Z(x) = (x, Z_2(x))$, wobei $Z_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$. D.h. Z ist durch diese glatte Funktion vollständig festgelegt. Für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$Z.f(x) := (df \circ Z)(x) = df(x, Z_2(x)) = f'(x) \cdot Z_2(x).$$

Für die Lie-Klammer von zwei glatten Vektorfeldern $X, Y : \mathbb{R} \to T\mathbb{R}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}[X,Y].f :&= X.(Y.f) - Y.(X.f) = X.(f' \cdot Y_2) - Y.(f' \cdot X_2) \\ &= (f' \cdot Y_2)' \cdot X_2 - (f' \cdot X_2)' Y_2 \\ &= (f'' \cdot Y_2 + f' \cdot Y_2') \cdot X_2 - (f'' \cdot X_2 + f' \cdot X_2') \cdot Y_2 \\ &= f' \cdot (Y_2' \cdot X_2 - X_2' \cdot Y_2).\end{aligned}$$

Damit X im Zentrum liegt, muss die obige Gleichung für alle f und Y Null ergeben. Für $f(x) := x$ erhalten wir also die Bedingung $Y_2' \cdot X_2 - X_2' \cdot Y_2 = 0$. Mit $Y_2(x) := 1$ konstant ergibt sich $X_2' = 0$, d.h. X_2 muss konstant sein. Schließlich folgt für $Y_2(x) := x$, dass X_2 konstant Null sein muss. D.h. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist trivial, besteht also nur aus dem Nullschnitt.
Das gleicher Argument mit $Y_2(x) := (\delta_{ij})_{1 \le j \le n}$ $(1 \le i \le n)$ bzw. $Y_2 := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, zeigt, dass auch das Zentrum der Vektorfelder über $\mathbb{R}^n$ trivial ist und ein eintsprechendes Argument mit den Eingeschränkungen zeigt, dass dies ebenso für Vektorfelder gilt, die nur auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind.