Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
12.1.2015

11. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 27 (Topologischer Abschluss)

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Sei $Y \subseteq X$. In der Vorlesung wurde der Abschluss von Y in X durch

$$\overline{Y} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \\ Y \subseteq A}} A$$

definiert. Zeigen Sie $\overline{Y} = \{x \in X : U \cap Y \neq \varnothing \text{ für alle Umgebungen } U \text{ von } x\}$.

(b) Seien X_1, X_2 topologische Räume und $Y_1 \subseteq X_1$, $Y_2 \subseteq X_2$. Zeigen Sie, dass $\overline{Y_1 \times Y_2} = \overline{Y_1} \times \overline{Y_2}$ gilt.

(c) Sei Z ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass $f : X \to Z$ stetig ist, genau dann wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Z$ abgeschlossen ist.

(d) In der Situation von (c) gilt $f(\overline{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$ für jede Teilmenge $Y \subseteq X$.

(e) Sei G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Folgern Sie, dass $\overline{H}$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

Lösungsvorschlag: (a) Sei $B := \{x \in X : U \cap Y \neq \varnothing \text{ für alle Umgebungen } U \text{ von } x\}$. Offensichtlich gilt $Y \subseteq B$. Weiter ist B abgeschlossen, da

$$B^c = \{x \in X : \exists \text{Umgebung } U \text{ von } x \text{ so, dass } U \cap Y = \varnothing\}$$

als Vereinigung offener Mengen offen ist. Als nächstes zeigen wir: Ist A abgeschlossen mit $Y \subseteq A$, so folgt $B \subseteq A$, was den Beweis beendet. Genauer zeigen wir $A^c \subseteq B^c$. Sei also $x \in A^c$, da diese Menge offen ist existiert eine Umgebung U von x so, dass $U \cap A = \varnothing$. Wegen $Y \subseteq A$ folgt $U \cap Y = \varnothing$ und damit per Definition $x \in B^c$.
(b) Die Produkte offener Mengen bilden eine Basis der Produkttopologie, d.h. für alle $W \subseteq X_1 \times X_2$ offen existiert $U \subset X_1, V \subseteq X_2$ offen mit $U \times V \subseteq W$ (insbesondere ist $U \times V$ offen in $X_1 \times X_2$). Somit folgt die Aussage sofort mit (a).
(c) Wegen $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ folgt dies aus der Definition von Stetigkeit.
(d) Aus (c) folgt, dass $f^{-1}(\overline{f(Y)})$ abgeschlossen ist und wegen $f(Y) \subseteq \overline{f(Y)}$ gilt $Y \subseteq f^{-1}(\overline{f(Y)})$. D.h. $f^{-1}(\overline{f(Y)})$ ist eine der Mengen über die in der Definition des Abschlusses geschnitten wird. Somit gilt $\overline{Y} \subseteq f^{-1}(\overline{f(Y)})$.

(e) Sei $\mu\colon G \times G \to G$ die Multiplikation und $\iota\colon G \to G$ die Inversion auf G. Diese Abbildungen sind glatt und somit stetig. Wir erhalten

$$\mu(\overline{H} \times \overline{H}) \overset{(b)}{=} \mu(\overline{H \times H}) \overset{(d)}{\subseteq} \overline{\mu(H \times H)} = \overline{H}$$

und somit ist $\overline{H}$ abgeschlossen unter der Multiplikation. Ein analoges Argument für die Inversion liefert die Aussage.

Aufgabe G 28 (Die Orthogonale Gruppe)

(a) Zeigen Sie, dass die glatte Abbildung

$$\Phi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T A$$

eine Submersion ist. *Hinweis:* Berechnen Sie die Ableitung von Φ und zeigen Sie, dass diese surjektiv ist. Nutzen Sie für letzteres Matrizen der Form $\frac{1}{2}(A^{-1})^T C$.

(b) Zeigen Sie, dass die *orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\colon AA^T = \mathbb{1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist.

(c) Schließen Sie, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine Liegruppe ist.

Lösungsvorschlag: (a) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir berechnen die Richtungsableitung

$$\begin{aligned}\frac{(A+tB)^T(A+tB) - A^T A}{t} &= \frac{A^T A + tA^T B + tB^T A + t^2 B^T B - A^T A}{t}\\ &= A^T B + B^T A + tB^T B\\ &\overset{t\to 0}{\to} A^T B + B^T A.\end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad B \mapsto A^T B + B^T A$$

surjektiv ist. Für $C \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ definieren wir dazu $B := \frac{1}{2}(A^{-1})^T C$ und erhalten

$$\begin{aligned}A^T B + B^T A &= A^T \frac{1}{2}(A^{-1})^T C + \left(\frac{1}{2}(A^{-1})^T C\right)^T A\\ &= \frac{1}{2}(A^{-1}A)^T C + \frac{1}{2} C^T A^{-1} A\\ &= \frac{1}{2}(C + \underbrace{C^T}_{=C}) = C.\end{aligned}$$

(b) Mit (a) folgt dies aus $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\mathbb{1})$.
(c) Da $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit und eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist folgt dies sofort.

Aufgabe G 29 (Gruppenwirkung)

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppenwirkung

$$f\colon \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \to P(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (A, \mathbb{R}v) \mapsto \mathbb{R}Av$$

glatt ist. *Hinweis:* Nutzen Sie die Tatsache, dass $q\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^{n+1}), v \mapsto \mathbb{R}v$ eine surjektive Submersion ist (siehe G10).

(b) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Gruppenwirkung

$$\sigma\colon \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$$

glatt ist.

Lösungsvorschlag: (a) Wir benutzen folgendes Lemma aus der Vorlesung: Sind M, N, L Mannigfaltigkeiten und ist $q\colon M \to N$ eine surjektive Submersion, dann ist eine Abbildung $f\colon N \to L$ glatt genau dann, wenn $f \circ q\colon M \to L$ glatt ist.
Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})} \times q"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "q"] & P(\mathbb{R}^{n+1}) \\
\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{id}_{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})} \times q$ eine surjektive Submersion ist und die Gruppenwirkung von $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ glatt ist, folgt die Aussage nun aus dem Lemma.
(b) Sei $q\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ die in der Vorlesung definierte Quotientenabbildung. Diese ist eine surjektive Submersion und somit ist auch $q \times \mathrm{id}_{P(\mathbb{R}^{n+1})}$ eine surjektive Submersion. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_{P(\mathbb{R}^{n+1})}"'] & P(\mathbb{R}^{n+1}) \\
\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

und folgern aus (a) und dem Lemma die Aussage.