Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
26.1.2015

13. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 33 (Tensorprodukt)

Seien E und F endlich-dimensionale Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass $(ta) \otimes b = t(a \otimes b) = a \otimes tb$ für alle $a \in E$, $b \in F$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\beta \colon E^* \times F \to \mathrm{Hom}(E, F), \quad (\lambda, v) \mapsto (x \mapsto \lambda(x)v) =: \lambda_v$$

einen Isomorphismus $E^* \otimes F \cong \mathrm{Hom}(E, F)$ von Vektorräumen induziert.

(c) Elemente der Form $v \otimes w \in E \otimes F$ heißen elementare Tensoren. Zeigen Sie für $E = F = \mathbb{R}^n (n \geq 2)$, dass $E \otimes F$ Elemente enthält, die keine elementaren Tensoren sind.

Lösungsvorschlag: (a) Die Abbildung

$$\otimes \colon E \times F \to E \otimes F, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w$$

aus der Vorlesung ist bilinear, also gilt $\otimes(tv, w) = t \otimes (v, w) = \otimes(v, tw)$.
(b) Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von E und $(c_1, \ldots, c_m)$ eine Basis von F. Wir halten zunächst fest, dass $\dim(E^* \otimes F) = \dim E^* \cdot \dim F = \dim E \cdot \dim F = nm$ gilt (die Tensoren von Paaren von Basisvektoren aus E, F bilden eine Basis von $E \otimes F$). Weiter ist bekannt, dass Abbildungen der Form

$$\lambda_{ij} \colon E \to F, \quad \lambda_{ij}(b_k) := \begin{cases} c_j, & \text{falls } k = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ eine Basis von $\mathrm{Hom}(E, F)$ bilden. Es gilt also ebenfalls $\dim(\mathrm{Hom}(E, F)) = mn$. Die Abbildung β ist offensichtlich bilinear und wir erhalten die induzierte lineare Abbildung $\tilde{\beta} \colon E^* \otimes F \to \mathrm{Hom}(E, F)$. Mit $\beta(b_i^*, c_j) = \lambda_{ij}$ folgt aus der universellen Eigenschaft, dass $\lambda_{ij} \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta})$ gilt und $\tilde{\beta}$ somit surjektiv ist. Aus Dimensionsgründen ist $\tilde{\beta}$ also ein Isomorphismus von Vektorräumen.
(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\tilde{\beta} \colon \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (v \otimes w) \mapsto vw^T$$

ein Isomorphismus ist. Wir müssen also eine Matrix finden, die nicht die Form vw^T hat. Da vw^T immer Rang Eins hat, gilt dies z.B. für die Einheitsmatrix. Alternativ sei zunächst $n = 2$. Betrachte

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 \\ v_2w_1 & v_2w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $v_1w_1 = 0$ folgt $v_1 = 0$ oder $w_1 = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zu $v_1w_2 \neq 0 \neq v_2w_1$. Durch auffüllen der beiden Vektoren mit Nullen, lässt sich dieses Beispiel auf beliebige $n \in \mathbb{N}$ fortsetzen.

Aufgabe G 34 (Rahmen von Vektorbündeln)

Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel mit typischer Faser F, wobei $\dim F = n$. Sei $U \subseteq M$ offen. Eine glatte Abbildung $\sigma\colon U \to E$ heißt Schnitt, falls $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$ gilt. Ein *lokaler Rahmen* auf U ist ein Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von Schnitten auf U so, dass $(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ für alle $x \in U$ eine Basis von E_x bildet. Gilt $U = M$, so nennen wir den Rahmen *global*. Zeigen Sie:

(a) Um jedes $x \in M$ existiert eine offene Umgebung U, sodass es einen Rahmen auf U gibt.

(b) E ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Rahmen gibt.

Lösungsvorschlag: Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von F.
(a) Sei $x \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von x so, dass es eine lokale Trivialisierung

$$\Theta_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

gibt. Definiere die glatten Abbildungen

$$\alpha_i'\colon U \to U \times F, \quad u \mapsto (u, v_i).$$

Die Abbildungen $\alpha_i := \Theta_U^{-1} \circ \alpha_i'$ sind dann Schnitte und bilden offensichtlich einen lokalen Rahmen.
(b) Falls E trivial ist, folgt aus (a) die Existenz eines globalen Rahmens, indem wir $U = M$ setzen. Sei umgekehrt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein globaler Rahmen. Für $w \in E$ existiert genau ein $x \in M$ mit $w \in E_x$, d.h. es gibt eindeutige Skalare so, dass $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i^w \alpha(x)$. Die folgende Abbildung ist also wohldefiniert

$$\Theta\colon E \to M \times F, \quad w \mapsto \left(\pi(w), \sum_{i=1}^n \lambda_i^w v_i\right),$$

$\mathrm{pr}_2 \circ \Theta|_{E_x}$ ist linear und Θ hat die Umkehrabbildung

$$M \times F \to E, \quad \left(x, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(x).$$

Wir müssen nur noch die Glattheit zeigen. Sei dazu $\Theta_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ eine lokale Trivialisierung. Wir definieren

$$\Psi_U\colon U \times F \to U \times F, \qquad \left(x, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \mapsto \left(x, \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{pr}_2 \circ \Theta_U(\alpha_i(x))\right).$$

Auch diese Abbildung ist ein Diffeomorphismus. Die Umkehrabbildung erhalten wir durch einen Basiswechsel von $(\mathrm{pr}_2 \circ \Theta_U(\alpha_i(x)))_{1\le i\le n}$ zu $(v_i)_{1\le i\le n}$ in der zweiten Komponente und sie ist glatt, weil die Basisvektoren $\alpha_i(x)$ glatt von x abhängen. Es gilt $\Theta_U = \Psi_U \circ \Theta|_{\pi^{-1}(U)}$. Da wir um jeden Punkt eine Trivialisierung finden, ist Θ somit glatt.

Aufgabe G 35 (Paarung von einem Vektorbündeln und seinem Dual)

Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel. Zeigen Sie die Isomorphie $E^* \otimes E \cong \mathrm{Hom}(E, E)$. *Hinweis:* Ein Isomorphismus von Vektorbündeln $\pi_1\colon E_1 \to M, \pi_2\colon E_2 \to M$ ist ein glatter Diffeomorphismus $f\colon E_1 \to E_2$ so, dass $\pi_2 \circ f = \pi_1$ und $f|_{E_x}$ für alle $x \in M$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Lösungsvorschlag: Sei F die typische Faser von E. Wir verwenden den Isomorphismus $\tilde\beta\colon F^* \otimes F \to \mathrm{Hom}(F, F)$ aus G33(b) und definieren

$$f\colon E^* \otimes E \to \mathrm{Hom}(E, E), \qquad \lambda \otimes v \mapsto \lambda(\bullet) \cdot v.$$

Per Definition ist f Faserweise ein Isomorphismus und es gilt $\pi_{\mathrm{Hom}(E,E)} \circ f = \pi_{E^*\otimes E}$. Wir müssen also nur noch die Glattheit nachrechnen. Sei $\theta_E\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ eine Trivialisierung. Wir erhalten die Trivialisierungen

$$\theta_{\mathrm{Hom}(E,E)}\colon \bigcup_{x\in U} \mathrm{Hom}(E_x, E_x) \to U \times \mathrm{Hom}(F, F), \quad g_x \mapsto (x, \theta_E(x, \bullet) \circ g_x \circ \theta_E^{-1}(x, \bullet))$$

und

$$\theta_{E^*\otimes E}\colon \bigcup_{x\in U} (E_x)^* \otimes E_x \to U \times (F^* \otimes F), \quad \lambda_x \otimes v_x \mapsto (x, \lambda_x \circ \theta_E^{-1}(x, \bullet) \otimes \theta_E(x, v_x)).$$

Man sieht sofort $\theta_{\mathrm{Hom}(E,E)} \circ f \circ \theta_{E^*\otimes E}^{-1}(x, \lambda \otimes v) = (x, \tilde\beta(\lambda \otimes v))$, somit ist f glatt. Für f^{-1} erhalten wir mit $\tilde\beta^{-1}$ analog die Glattheit.