

14. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 36 (Das Möbiusband als Vektorbündel)

Sei $M = \mathbb{S}_1$ der Einheitskreis und $U_1 := \mathbb{S}_1 \setminus \{(0, -1)\}$, $U_2 := \mathbb{S}_1 \setminus \{(0, 1)\}$ und $U_{12} := U_1 \cap U_2$. Wir definieren eine Abbildung

$$g_{12}: U_{12} \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}), \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie U_1, U_2 und U_{12} und Begründen Sie, dass genau ein Vektorbündel E existiert, für das g_{12} ein Kozyklus ist.
- (b) Sei $\psi_j: U_j \times \mathbb{R} \rightarrow E, (x, y) \mapsto [j, x, y]$ wie in der Vorlesung. Sei weiter $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Wir definieren den Weg

$$\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow E, \quad t \mapsto \begin{cases} [1, \gamma(t), 1], & 0 \leq t \leq \pi \\ [2, \gamma(t), -1], & \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass α stetig und wohldefiniert ist. Bestimmen Sie $\psi_1^{-1}(\alpha(0))$ und $\psi_1^{-1}(\alpha(2\pi))$.

- (c) Sei $0_E: M \rightarrow E$ der Nullschnitt. Zeigen Sie, dass $E \setminus \mathrm{im}(0_E)$ wegzusammenhängend ist.
- (d) Zeigen Sie, dass das triviale Bündel ohne den Nullschnitt $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}) \setminus \mathrm{im}(0_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}})$ nicht wegzusammenhängend ist.
- (e) Schließen Sie, dass die Vektorbündel E und $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ nicht isomorph sind.
- (f) *Bonusaufgabe:* Was passiert, wenn man ein Möbiusband entlang der Mitte zerschneidet?

Aufgabe G 37 (Konstruktion von Kozyklen)

Seien $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel mit typische (endlich dimensionaler) Faser F_1 und F_2 . Wir möchten das Vektorbündel $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ durch Kozyklen konstruieren.

- (a) Für lineare Abbildungen $\alpha_1: F_1 \rightarrow F_1$ und $\alpha_2: F_2 \rightarrow F_2$ definieren wir

$$\text{Hom}(\alpha_1, F_2): \text{Hom}(F_1, F_2) \rightarrow \text{Hom}(F_1, F_2), \quad T \mapsto T \circ \alpha_1 \text{ und}$$

$$\text{Hom}(F_1, \alpha_2): \text{Hom}(F_1, F_2) \rightarrow \text{Hom}(F_1, F_2), \quad T \mapsto \alpha_2 \circ T.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\Phi_1: \text{Hom}(F_1, F_1) \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(F_1, F_2), \text{Hom}(F_1, F_2)), \quad \alpha \mapsto \text{Hom}(\alpha, F_2) \text{ und}$$

$$\Phi_2: \text{Hom}(F_2, F_2) \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(F_1, F_2), \text{Hom}(F_1, F_2)), \quad \alpha \mapsto \text{Hom}(F_1, \alpha)$$

glatt sind.

- (b) Sei g_{ij}^k ein Kozyklus von E_k , der durch eine Trivialisierung gegeben ist. Begründen Sie, dass man annehmen darf, dass g_{ij}^1 und g_{ij}^2 den gleichen Definitionsbereich haben (insbesondere kann man die gleiche Indexmenge verwenden).
- (c) Zeigen Sie, dass $g_{ij}(x) := \text{Hom}(F_1, g_{ji}^2(x)) \circ \text{Hom}(g_{ij}^1(x), F_2)$ einen Kozyklus von $\text{Hom}(E_1, E_2)$ definiert.