Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
27.10.2014

2. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Zusammenhang)

Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie:

(a) Ist X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung, dann ist Y zusammenhängend.
(b) Sind $A, B \subseteq X$ zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.
(c) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Menge, dann ist A ein Intervall.

Aufgabe G5 (Getrennte Variablen)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf geeigneten Definitionsbereichen mit der im Beweis von Satz 2.1 (siehe Skript) angegebenen Formel.

(a) $y' = \frac{y}{x},\ y(x_0) = y_0$
(b) $y' = \frac{y}{x^2},\ y(x_0) = y_0$.

Aufgabe G6 (Iterationsverfahren)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = y$, $y(0) = 1$ mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf.

Hausübungen

Aufgabe H4 (Ein Lösungsintervall; 3 Punkte)

Es sei

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1, |y - 2| \leq 1\}.$$

Finden Sie ein konkretes $\varepsilon > 0$, so dass die Differentialgleichung $y' = xy$ auf dem Intervall $[2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$ eine eindeutige Lösung mit Anfangswert $y(2) = 2$ besitzt. Nutzen Sie hierzu den quantitativen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lidelöff.

Aufgabe H5 (Getrennte Variablen; 3 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf geeigneten Definitionsbereichen mit der im Beweis von Satz 2.1 angegebenen Formel.

(a) $y' = \frac{y^2}{x^2},\ y(x_0) = y_0$
(b) $y' = ay + c,\ y(x_0) = y_0,\ a, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H6 (Iterationsverfahren; 3 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $y(x) = \cos(x)$ die eindeutige Lösung dieses Problems ist.
(b) Führen Sie die angegebene Differentialgleichung auf ein Anfangswertproblem erster Ordnung mit zwei Differentialgleichungen zurück.
(c) Führen Sie 4 Iterationsschritte nach Picard-Lindelöf durch, vermuten Sie eine Formel für den n-ten Iterationsschritt (ohne Beweis, d. h. es ist keine vollständige Induktion erforderlich) und erhalten Sie so die Lösung der anfänglichen Differentialgleichung. Stimmt diese Lösung mit der Lösung aus Aufgabenteil (a) überein?