

### 3. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

#### Gruppenübungen

**Aufgabe G7** (Lineare DGL)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = xy + 3x.$$

- (a) Lösen Sie die zugehörige homogene Gleichung mit Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ .
- (b) Lösen Sie die inhomogene Gleichung mit Anfangsbedingung  $y(0) = y_0$ .

**Aufgabe G8** (Variation der Konstanten)

Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen

$$y' = A(x) \cdot y + b(x),$$

wobei  $A = A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ .

- (a) Finden Sie ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.
- (b) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

**Aufgabe G9** (Charakteristisches Polynom einer Differentialgleichung)

Finden Sie Lösungsfundamentalsysteme der homogenen linearen Differentialgleichungen

- (a)  $y'' - 4y' + 2y = 0$ ,
- (b)  $y'' - 4y = 0$ ,
- (c)  $y'' + 4y = 0$ .

### Hausübungen

**Aufgabe H7** (Lineare DGL; 3 Punkte)

Für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke  $i(t)$  in einem elektrischen Stromkreis mit Induktivität  $L > 0$ , Ohmschen Widerstand  $R > 0$  und anliegender Wechselspannung  $U(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  gilt

$$L \cdot i' + R \cdot i = U.$$

Bestimmen Sie  $i(t)$  für  $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ , wobei  $i(0) = 0$ . (Dabei bezeichne  $\omega$  die Wechselspannungsfrequenz,  $U_0$  die Amplitude.)

**Aufgabe H8** (Charakteristisches Polynom einer Differentialgleichung; 3 Punkte)

Finden Sie reelle (!) Lösungsfundamentalsysteme der homogenen linearen Differentialgleichungen

(a)  $y'''' + y = 0$ ,

(b)  $y'''' - 4y'''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ .

Hinweis zu (a): Auch die komplexe Zahl  $\sqrt{i}$  besitzt eine Darstellung  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe H9** (Matrixexponentialfunktion; 3 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jede quadratische reelle oder komplexe Matrix  $A$  gilt

$$\det e^A = e^{\text{Spur}(A)}.$$

Hinweis: Bekannte Tatsachen aus der Linearen Algebra wie etwa Aussagen über Jordan-Normalform, Invarianz der Spur unter Basistransformationen, Determinantenproduktsatz etc. dürfen ohne Beweis benutzt werden. Kapitel 4 der Vorlesung darf benutzt werden.