Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
10.11.2014

4. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G10 (DGL höherer Ordnung)

Seien $\omega_0, \omega \in]0, \infty[$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t) \tag{1}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) unter der Bedingung $\omega_0 \neq \omega$ an.

Aufgabe G11 (Spur einer σ-Algebra auf einer Teilmenge)

Es sei X eine Menge, $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{S}|_Y \;:=\; \{A \cap Y : A \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Aufgabe G12 (Erzeugen einer σ-Algebra “von unten”)

Finden Sie die von der Menge

$$\mathcal{E} \;:=\; \big\{\{1,2,3\},\, \{3,4\}\big\}$$

erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf der Menge $X := \{1,2,3,4\}$.

[Anleitung: Nehmen Sie zu $\mathcal{E}$ alle endlichen Vereinigungen, Durchschnitte und Komplemente von Mengen aus $\mathcal{E}$ hinzu. Wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie eine σ-Algebra erhalten haben].

Hausübungen

Aufgabe H10 (DGL höherer Ordnung; 3 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung (1) aus G10. Geben Sie nun die allgemeine Lösung von (1) unter der Bedingung $\omega_0 = \omega$ an. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$. Unterscheidet sich das Verhalten im Vergleich zu Aufgabe G10?

Aufgabe H11 (Spur einer σ-Algebra auf einer messbaren Menge; 3 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Messraum und $Y \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass die Spur von $\mathcal{S}$ auf Y gegeben ist durch

$$\mathcal{S}|_Y \;=\; \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\}\,.$$

Insbesondere gilt also $\mathcal{S}|_Y \subseteq \mathcal{S}$, wenn $Y \in \mathcal{S}$.

Aufgabe H12 (Borelsche Teilmengen von $\mathbb{R}$; 3 Punkte)

Wir betrachten die von der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$ auf $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Borelmenge*, wenn $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass jede der folgenden Mengen eine Borelmenge ist:

$$]0,1[\,, \qquad [0,1]\,, \qquad [0,1[\,, \qquad \{0\}\,, \qquad \mathbb{Q}\,.$$