Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15

17.11.2014

5. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Weitere Beispiele von σ-Algebren)

Es sei X eine Menge.

(a) Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ derart, dass A abzählbar ist oder $A^c = X \setminus A$ abzählbar ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X ist.

(b) Finden Sie die von der Menge $\mathcal{E} = \big\{\{x\} : x \in X\big\}$ aller einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf X.

Aufgabe G14 (Urbilder und mengentheoretische Operationen)

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle Teilmengen $A, B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$. Insbesondere gilt also $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

(b) Für jede Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen $A_j \subseteq Y$ gilt

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j).$$

Aufgabe G15 (Direktes Bild und Zurückziehen einer σ-Algebra)

(a) Bestimmen Sie das direkte Bild $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ unter der Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \qquad f(x) := [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist die Menge $f^{-1}[\mathcal{S}]$ aller Urbilder messbarer Mengen eine σ-Algebra auf X. In Formeln:

$$f^{-1}[\mathcal{S}] := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\}.$$

Hausübungen

Aufgabe H13 (Urbilder von Mengen; 3 Punkte)

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Sind $A \subseteq Y$ und $B \subseteq Y$ disjunkt, so sind auch $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ disjunkt.
(c) Ist Y ein kartesisches Produkt $Y = Y_1 \times Y_2$, $f = (f_1, f_2)$ mit den Komponenten $f_j \colon X \to Y_j$ und sind $A_1 \subseteq Y_1$ und $A_2 \subseteq Y_2$ Teilmengen, so ist

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) \;=\; f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2)\,.$$

Aufgabe H14 (Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.15:

(a) Die Menge $\mathcal{E} := \{\,]a,b[\,: a,b \in \mathbb{Q}^n \text{ mit } a_k < b_k \text{ für } k = 1,\dots,n\}$ aller offenen Quader mit rationalen Eckpunkten ist ein Erzeugendensystem für die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E})$.
(b) Auch die Menge $\mathcal{F}$ aller halboffenen Quader erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe H15 (Messbar oder nicht?; 3 Punkte)

Ist die folgende Funktion $f \colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar?

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} 1/x & \text{für } x \neq 0; \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

[Hinweis: Wegen Satz 1.25 brauchen Sie nur Urbilder offener Mengen zu betrachten].