Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
24.11.2014

6. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G16 (Eine stückweise definierte Funktion)

Ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}; \\ \cos x & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar?

Aufgabe G17 (Eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$)

Die Abbildung $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ist streng monoton wachsend und ein Homöomorphismus (also eine stetige Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung – dem Tangens). Somit ist auch die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$f\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \qquad f(x) := \begin{cases} \arctan(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = \pm\infty. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass man wie folgt eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ erhält:

$$d\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty[, \ d(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen ∞ konvergiert, wenn zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x_n \geq r$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe G18 (Infima und Suprema in $\overline{\mathbb{R}}$)

Beweise Lemma 1.43 der Vorlesung: Jede Teilmenge $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$.

Hausübungen

Aufgabe H16 (Translationsinvarianz von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 3 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir (u.a.) zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Borelmenge ist, wenn die verschobene Menge $x + A := \{x + y : y \in A\}$ eine Borelmenge ist (wobei $x \in \mathbb{R}^n$). Zeigen Sie hierzu:

(a) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen und ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X, so gilt für die direkten Bilder:

$$g_*(f_*(\mathcal{S})) \;=\; (g \circ f)_*(\mathcal{S}) .$$

(b) Sind X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig, so ist $\mathcal{B}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$.
[Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathcal{O}_Y \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$, wobei $\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : U \text{ ist offen}\}$.]

(c) Ist f in (b) ein Homöomorphismus (vgl. Aufgabe G20), so ist $f_*(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ unter Translationen invariant ist, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;=\; \{x + A : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe H17 (Zur Addition in $\overline{\mathbb{R}}$; 3 Punkte)

Wir setzen die übliche Addition reeller Zahlen fort durch $x + (\pm\infty) := (\pm\infty) + x := \pm\infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die Ausdrücke "$\pm\infty + (\mp\infty)$" bleiben undefiniert.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die Summe $x + (y + z)$ genau dann definiert, wenn die Summe $(x + y) + z$ definiert ist (also Ausdrücke wie $\infty + (-\infty)$ bei der Berechnung nicht auftreten). In diesem Falle gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(b) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$, mit Limes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: Wenn $x + y$ definiert ist, so ist auch $x_n + y_n$ für alle genügend großen n definiert, und es gilt $x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. Also

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n \;+\; \lim_{n\to\infty} y_n .$$

[Arbeiten Sie direkt mit Definition 1.41, **nicht** mit der Metrik aus Aufgabe G20!]

Aufgabe H18 (Limites in $\overline{\mathbb{R}}$; 3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.45 (a) und (d) sowie die erste Hälfte von (c).

Hinweis: Einige der auftretenden Fälle sind aus der Analysis I bekannt und brauchen nicht erneut bewiesen werden.