Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
01.12.2014

7. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G19 (Lebesgue-Borel-Maß einiger Teilmengen von $\mathbb{R}$)

Es sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Berechnen Sie $\lambda(A)$ für jede der folgenden Mengen A:

$$[0,1[\,; \quad \{0\}\,; \quad \mathbb{Q}\,; \quad [0,1[\,\cap\mathbb{Q}\,; \quad [0,1[\,\setminus\mathbb{Q}\,.$$

Aufgabe G20 (Etwas verzwicktere Teilmengen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n keine 7 enthält.

Es sei A die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung keine 7 enthält.

Es sei B die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens eine 7 enthält.

(Hierbei betrachten wir nur Dezimalbrüche ohne Neunerperiode).

Zeigen Sie, dass A_n, A und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß dieser Mengen.

Aufgabe G21 (Zur Maßdefinition)

(a) (Dirac-Maß). Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x \colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ die durch

$$\delta_x(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A; \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion. Prüfen Sie nach, dass δ_x ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ ist.

(b) Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $\mu \colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ eine σ-additive Funktion. Zeigen Sie: Ist $\mu(\emptyset) > 0$, so ist $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Hausübungen

Aufgabe H19 (Approximation durch Stufenfunktionen)

Im Beweis von Satz 3.4 wurden gewisse Stufenfunktionen s_n definiert, mit denen man eine nicht-negative messbare Funktionen approximieren kann.

(a) Berechnen Sie s_1 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$; skizzieren Sie f, s_1 und s_2.

(b) Skizzieren Sie f und s_1 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + \cos(x)$.

Aufgabe H20 (Noch verzwicktere Teilmengen)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n höchstens eine 4 enthält.

Es sei B die Menge aller Zahlen im Intervall $[0, 1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens zwei Vieren enthält.

Zeigen Sie, dass A_n und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß von A_n und B.

Aufgabe H21 (Dies und das)

(a) Es sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Für die Mengen $A_n :=]0, \frac{1}{n}[$ gilt offensichtlich

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots .$$

Berechnen Sie $\zeta(A_n)$. Berechnen und vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(A_n) \qquad \text{und} \qquad \zeta\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) .$$

Ist dies ein Widerspruch zu Lemma 2.4 (d)?

(a) Wir statten $\overline{\mathbb{R}}$ mit der Topologie aus, deren Basis gegeben ist durch Mengen der Form

$$]a, b[,\ \ [-\infty, a[,\ \ ]b, \infty]$$

für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass diese Basis die gleichen Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ erzeugt wie die Metrik aus Aufgabe G17.