

10. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie das Integral $\int_A f \, d\lambda_2$, wobei...

- (a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ist und

$$f(x, y) := x^2 + y^3 + 2xy^2;$$

- (b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$ ist und

$$f(x, y) := xy - 3 \cos(x + y).$$

Aufgabe G29 (Ebene Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Abbildung $P: [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Skizzieren Sie die Menge A und das Bild $P(A)$ in den folgenden Fällen:

- (a) $A :=]0, 1[\times]0, 2\pi[$;
(b) $A :=]0, 1[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ist $P|_A: A \rightarrow P(A)$ ein Diffeomorphismus?

Aufgabe G30 (Transformation von Hand)

Sei V die von den folgenden Geraden umschlossene offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 :

$$y = x; \quad y = 2x; \quad y + x = 1; \quad y + x = 3.$$

Skizzieren Sie V und berechnen Sie mit der Transformationsformel das Integral

$$\int_V \frac{y}{x} d\lambda(x, y).$$

Hausübungen

Aufgabe H28 (Transformationsformel für ebene Polarkoordinaten)

Berechnen Sie das Integral $\int_B f \, d\lambda_2$ mit:

(a) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ und } y > 0\}$ und $f(x, y) := \frac{2xy}{x^2+y^2}$;

(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$.

Hinweis: In Teil (b) müssen Sie eine geeignete Menge vom Maß 0 weglassen, bevor Sie die Transformationsformel anwenden können!

Aufgabe H29 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie das Integral $\int_A (2x + y) d\lambda_2(x, y)$, wobei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}.$$

Aufgabe H30 (Volumenberechnung mit Kugelkoordinaten)

Skizzieren Sie grob die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$