Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
19.01.2015

12. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Integration auf Flächen)

Seien $h\colon]-1,1[\to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2}$, $M := \operatorname{graph}(h)$ und $f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x$.

(a) Zeichnen Sie M.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_M f dS_M.$$

Aufgabe G35 (Integralsatz von Gauß)

Gegeben ist die Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und das Vektorfeld $F(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie das äußere Normalenfeld ν von ∂K, dem Rand von K. Verifizieren Sie dann den Integralsatz von Gauß, indem Sie

(a) $\int_K \operatorname{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z)$ und

(b) $\int_{\partial K} F \bullet d\vec{S}$

berechnen und vergleichen.

Hinweis zu (b): Spalten Sie die Kugel auf so, dass Sie die einzelnen Teile jeweils als Graph darstellen können.

Aufgabe G36 (Normalbereiche und Vertauschen der Variablen)

Gegeben sei der Normalbereich $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$.

(a) Skizzieren Sie A und bestimmen Sie anhand der Skizze den Flächeninhalt von A.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_A 1\, d(x,y)$.

(c) Vertauschen Sie die Variablen in A, d.h. finden Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad a \leq y \leq b, f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}$$

gilt.

Hausübungen

Aufgabe H34 (Eingeschlossene Fläche; 3 Punkte)

Gegeben seien $f_1 \colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) := \sqrt{x}$ und $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := \frac{1}{4}x$.

(a) Bestimmen Sie die beiden Schnittpunkte der Funktionen.

(b) Berechnen Sie die Fläche, die die Funktionen einschließen, mit Hilfe eines Doppelintegrals.

Aufgabe H35 (Volumen eines Rotationskörpers; 3 Punkte)

Es sei $r \colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ eine messbare Funktion. Uns interessiert das Volumen des Rotationskörpers

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \le r(z)\right\} \;=\; h^{-1}([0,\infty[)$$

mit $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := r(z) - \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

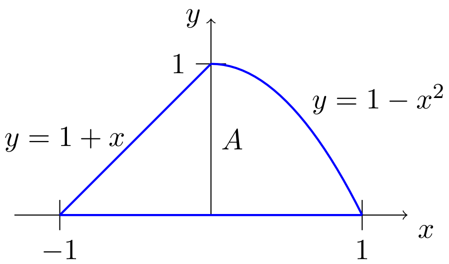
(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_3(M) = \pi \int_{\mathbb{R}} r(z)^2 \, d\lambda_1(z)$.

(c) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen der Menge

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \ge 1 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \le z^{-\alpha}\right\}.$$

Aufgabe H36 (Flächeninhalt; 3 Punkte)

Gegeben Sei das folgende blau umschlossene Gebiet A:



.

Stellen Sie ein Doppelintegral auf, das den Flächeninhalt angibt und berechnen Sie das Integral. Bestimmen Sie anschließen den geometrischen Schwerpunkt von A.
Hinweis: Der geometrische Schwerpunkt (x_S, y_S) ist durch $x_S = \frac{1}{I}\int_A x \, d(x,y)$ und $y_S = \frac{1}{I}\int_A y \, d(x,y)$ gegeben, wobei I der Flächeninhalt von A ist.