Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
26.01.2015

13. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G37 (Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$)

Skizzieren Sie grob die Mengen und begründen Sie, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$E := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+4y^2=1\big\}\ ;\quad L := \mathbb{R}\times\{0\}\,;\quad G := \{(x,\sin(x))\colon x\in\,]0,\pi[\}\,;$$

$$R := \partial\left([0,1]^2\right);\quad D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<1\};\quad M := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y^2=x^2(1-x^2)\big\}.$$

Aufgabe G38 (Reihen von Maßen)

Es sei $(X,\mathcal{S})$ ein Messraum und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen μ_j auf $(X,\mathcal{S})$. In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Doppelreihensatzes (Folgerung 3.27) gezeigt, dass auch $\mu\colon\mathcal{S}\to[0,\infty]$, $\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(A)$, ein Maß ist.

(a) Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der Integrationstheorie (siehe Vorlesung), dass für jede nicht-negative messbare Funktion $f\colon X\to[0,\infty]$ gilt:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_X f\,d\mu_j\right)\,. \tag{1}$$

Hinweis für Schritt 3: Nach Folgerung 3.26 ist der Satz über monotone Konvergenz auch für Reihen von Zahlen in $[0,\infty]$ gültig.

(b) Zeigen Sie: Ist $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ bzgl. μ über X integrierbar, so ist f für jedes $j\in\mathbb{N}$ bzgl. μ_j über X integrierbar und es gilt (1).

[Spalten Sie f in Positiv- und Negativteil auf und benutzen Sie (a)!]

Aufgabe G39 (Injektive Immersionen vs. Einbettungen)

Wir betrachten die Funktion

$$\gamma :]-2,\ \tfrac{3\pi}{2}+1[\ \to\ \mathbb{R}^2,\quad \gamma(t) := \begin{cases} (1,\ t) & \text{für } t\in\,]-2,\ 0];\\ (\cos t,\ \sin t) & \text{für } t\in[0,\ 3\pi/2];\\ (t-3\pi/2,\ -1) & \text{für } t\in[3\pi/2,\ 3\pi/2+1[.\end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie das Bild M von γ. Begründen Sie kurz, dass γ stetig differenzierbar ist (Vergleich rechts- und linksseitiger Ableitungen!)

(b) Zeigen Sie, dass γ eine injektive Immersion ist, aber keine Einbettung.
Ist $M = \operatorname{im}\gamma$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

Hausübungen

Aufgabe H37 (Untermannigfaltigkeiten; 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das einschalige Hyperboloid $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in Aufgabe G37. Ist $N := M \setminus \{(0,0)\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $S_{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe H38 (Eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$; 3 Punkte)

(a) Es sei S der Kreis (Kreislinie) in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(5,0)$ und Radius 1. Finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass $S = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \colon h(y,z) = 0\}$. Zeigen Sie, dass S eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Skizzieren Sie grob die Menge

$$M \ := \ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon h(\sqrt{x^2+y^2},\, z) = 0\right\}.$$

Wie sieht die Menge aus? (Beschreiben Sie sie in Worten!) Zeigen Sie unter Benutzung der Definition von Untermannigfaltigkeiten, dass M eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass Mannigfaltigkeiten lokal wie Graphen aussehen. Stellen Sie die Punkte (x,y,z) von M nahe $p := (5,0,1) \in M$ explizit in der Form $(x, y,\, f(x,y))$ dar mit einer stetig differenzierbaren Funktion f.

[Hinweis: Lösen Sie $h(\sqrt{x^2+y^2},\, z) = 0$ nach z auf.].

Aufgabe H39 ($\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ als Mannigfaltigkeit; 3 Punkte)

Es sei $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

[Interpretation: Nach dem Vorigen ist die sogenannte "spezielle lineare Gruppe"

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \colon \det(A) = x_1x_4 - x_2x_3 = 1\right\}$$

der reellen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1 eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des 4-dimensionalen Vektorraums $M_2(\mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen].

(b) Lösen Sie die Gleichung $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$ nahe $e := (1,0,0,1)$ (entspr. der Einheitsmatrix) explizit nach x_4 auf und stellen Sie M nahe e als Graph einer C^1-Funktion dar. Geben Sie eine Karte für M um e an.