Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
20.10.2014

1. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Impressionen vom Oktoberfest)

Eine Maß Bier wird zur Zeit $t = 0$ frisch gezapft. Rührt man das Bier nicht an, so verringert sich das Volumen $V(t)$ des Bierschaums pro Zeit mit einer Rate, welche proportional zum momentan vorhandenen Schaumvolumen ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit t auf. Lösen Sie die Differentialgleichung. Interpretieren Sie die Lösung und versuchen Sie, die Bedeutung der darin vorkommenden Konstanten zu verstehen.

Lösung: (a) Die Volumenänderung ΔV des Bierschaums in einem kleinen Zeitintervall Δt ist näherungsweise proportional zu Δt und zum momentanen Volumen $V(t)$ des Bierschaums, also

$$\Delta V \approx -KV(t)\Delta t$$

für eine Konstante $K > 0$. Teilen durch Δt führt auf

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx -KV(t)\,,$$

und Grenzübergang $\Delta t \to 0$ schließlich auf die Formel

$$\frac{dV}{dt}(t) = -KV(t)\,. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass wir bei einer solchen “Herleitung” nicht streng mathematisch argumentieren (lässt sich z.B. die Bedeutung von $\approx$ mathematisch dingfest machen?), dies auch prinzipiell gar nicht können, weil wir uns ja nicht mit mathematischen Objekten und ihren Beziehungen beschäftigen, sondern reale Dinge, Vorgänge und Größen (die keine mathematischen Objekte sind) mathematisch beschreiben wollen, ihnen ein mathematisches Modell zuordnen wollen.

Von nun an aber geht es streng mathematisch weiter: Unter der Annahme, dass $V(t) \neq 0$, können wir in (1) beide Seiten durch $V(t)$ teilen und erhalten

$$\left(\frac{d}{dt}\ln(V)\right)(t) = \frac{1}{V(t)}\frac{dV}{dt}(t) = -K\,.$$

Integration beider Seiten von 0 bis t führt auf

$$\ln(V(t)) - \ln(V(0)) = -Kt + K0\,,$$

also

$$\ln \frac{V(t)}{V(0)} = -Kt\,.$$

Anwenden der Exponentialfunktion und anschließendes Auflösen nach $V(t)$ liefert

$$V(t) = V(0)e^{-Kt}\,.$$

Hierbei ist $V(0)$ das Volumen des Bierschaums zur Zeit $t = 0$. Die Funktion V ist monoton fallend, stets > 0 (der Schaum verschwindet also nie vollständig!) und geht für $t \to \infty$ gegen 0.Die Konstante K gibt an, wie schnell der Schaum verschwindet. Z.B. ist nach der Zeit $t = 1/K$ das Schaumvolumen auf den e-ten Teil des ursprünglichen Volumens geschrumpft.

Aufgabe G2 (Ein Richtungsfeld)

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = 2x.$$

Finden Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung und bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= 2x \\ y(1) &= 3. \end{cases}$$

Lösung: Durch Integration der rechten Seite erhält man als mögliche Lösungen $y(x) = x^2 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dies sind offensichtlich alle Lösungen der Differentialgleichung.

Das Anfangswertproblem löst man durch Auflösen der Gleichung $3 = y(1) = 1 + c$ und erhält damit die Lösung $y(x) = x^2 + 2$. Offensichtlich ist $c = 2$ die einzige mögliche Wahl, weshalb die angegebene Lösung eindeutig ist.

Aufgabe G3 (Lokale Lipschitzbedingung)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto |x| \cdot y.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.
(b) Finden Sie eine Lösung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= |x| \cdot y \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?
[Hinweis: Es ist $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x \cdot |x|) = |x|$.]

Lösung: Sei $x \in \mathbb{R}$ fest, dann ist $y \mapsto |x|y$ stetig differenzierbar, erfüllt nach Satz 1.4 aus dem Skript also eine lokale Lipschitzbedingung. Nach Satz 1.5 hat die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung. Mit dem Hinweis vom Übungsblatt und den bereits bekannten Methoden (logarithmische Ableitung) berechnet bzw. erkennt man sofort, dass diese Lösung durch $\varphi(x) = y_0 e^{\frac{x \cdot |x|}{2}}$ gegeben ist.