Prof. Dr. Helge Glöckner — Wintersemester 2014/15
27.10.2014

2. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Zusammenhang)

Seien X und Y topologische Räume. Zeigen Sie:

(a) Ist X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung, dann ist Y zusammenhängend.
(b) Sind $A, B \subseteq X$ zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.
(c) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Menge, dann ist A ein Intervall.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Aussage auch im Fall wenn f nicht surjektiv ist. Seien $U, V \subseteq f(X)$ offen, $f(X) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ und $y_0 \in U$. Dann gelten $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ und $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Da auch $f\colon X \to f(X)$ stetig ist folgt, dass $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in X sind. Es folgt $f^{-1}(U) = X$ also $f(X) = U$. Folglich ist $f(X)$ zusammenhängend.
(b) Sei $x_0 \in A \cap B$, $A \cup B = U \cup V$ mit $U, V \subseteq A \cup B$ offen, $U \cap V = \emptyset$. O.B.d.A. sei $x_0 \in U$. Dann $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$, $x_0 \in U \cap A$, $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$. Da A zusammenhängend ist folgt $V \cap A = \emptyset$. Analog sieht man, dass $V \cap B = \emptyset$. Es folgt $V = \emptyset$. Somit ist $A \cup B$ zusammenhängend.
(c) Seien $x, y \in A$ und o.B.d.A. $x < y$. Sei $z \in]x, y[$. Angenommen $z \notin A$, dann seien $U := A \cap]-\infty, z[$ und $V := A \cap]z, \infty[$. Es gilt also $A = U \cup V$, U und V sind offen in A, $x \in U$, $y \in V$. Dies ist ein Widerspruch, da A zusammenhängend.

Aufgabe G5 (Getrennte Variablen)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf geeigneten Definitionsbereichen mit der im Beweis von Satz 2.1 (siehe Skript) angegebenen Formel.

(a) $y' = \frac{y}{x}$, $y(x_0) = y_0$
(b) $y' = \frac{y}{x^2}$, $y(x_0) = y_0$.

Lösung: Beide Differentialgleichungen sind von der Form $y' = f(x)g(y)$. Als Definitionsbereich betrachten wir den Quadranten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$.

(a) Stammfunktionen von $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y}$ sind $F(x) = \ln(x) - \ln(x_0)$ und $H(y) = \ln(y) - \ln(y_0)$. Die Umkehrfunktion von H ist $H^{-1}(z) = y_0 e^z$. Die eindeutig bestimmte Lösung ist also $y(x) = H^{-1}(F(z)) = \frac{y_0}{x_0} x$.

(b) Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist $F(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$. Wie oben haben wir auch hier $H^{-1}(z) = y_0 e^z$. Die eindeutig bestimmte Lösung ist also $y(x) = H^{-1}(F(z)) = y_0 e^{\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}}$. Bemerkung: Man rechnet noch nach, dass hier tatsächlich globale Lösungen gefunden wurden. Das muss nicht immer so sein! Ein Beispiel dazu liefert Aufgabe H5.

Aufgabe G6 (Iterationsverfahren)

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = y$, $y(0) = 1$ mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf.

Lösung: Mit $f(x,y) = y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\phi_0(x) = y_0$ und $\phi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_n(t))dt$ folgt $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zum Beweis per vollständiger Induktion sieht man, dass die Aussage für $n = 0$ richtig ist. Dann folgt

$$\phi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}.$$

Wie im Satz von Picard-Lindelöf ist die eindeutige Lösung des angegebeben Anfangswertproblems also $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$.