Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
10.11.2014

4. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G10 (DGL höherer Ordnung)

Seien $\omega_0, \omega \in]0, \infty[$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t) \tag{1}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) unter der Bedingung $\omega_0 \neq \omega$ an.

Lösung: Das charakteristische Polynom von (1) ist gegeben durch $P(X) = X^2 + \omega_0^2 = (X - i\omega) \cdot (X + i\omega)$. Damit ist $t \mapsto e^{ti\omega_0}$ und $t \mapsto e^{-ti\omega_0}$ ein komplexes und

$$\varphi_1(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \varphi_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

ein reelles Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Da $\omega \neq \omega_0$ ist $i\omega$ keine Nullstelle des charakteristische Polynoms. Um eine spezielle Lösung ψ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t} \tag{2}$$

zu erhalten machen wir also den Ansatz $\psi(t) = ce^{i\omega}$. Und erhalten

$$e^{i\omega t} = P(D)\psi = c(\omega_0^2 - \omega^2)e^{i\omega t}.$$

Also folgt $c = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ und somit ist $t \mapsto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (2) und folglich $\psi(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun zu $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \psi$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G11 (Spur einer σ-Algebra auf einer Teilmenge)

Es sei X eine Menge, $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{S}|_Y \ := \ \{A \cap Y : A \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Lösung: **S1**: Es ist $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{S}|_Y$.

S2: Ist $B \in \mathcal{S}|_Y$, so ist $B = A \cap Y$ für eine Menge $A \in \mathcal{S}$. Wir erhalten

$$Y \setminus B = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus A = Y \cap (X \setminus A).$$

Da $X \setminus A \in \mathcal{S}$, ist somit auch $Y \setminus B \in \mathcal{S}|_Y$.

S3: Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $B_n \in \mathcal{S}|_Y$, so gibt es für jedes n eine Menge $A_n \in \mathcal{S}$ mit $B_n = A_n \cap Y$. Man macht sich klar, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap Y) \;=\; \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap Y$$

gilt. Damit und mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ folgt nun

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap Y) \;=\; \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap Y \;\in\; \mathcal{S}|_Y\,.$$

Aufgabe G12 (Erzeugen einer σ-Algebra "von unten")

Finden Sie die von der Menge

$$\mathcal{E} \;:=\; \big\{\{1,2,3\},\, \{3,4\}\big\}$$

erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf der Menge $X := \{1,2,3,4\}$.

[Anleitung: Nehmen Sie zu $\mathcal{E}$ alle endlichen Vereinigungen, Durchschnitte und Komplemente von Mengen aus $\mathcal{E}$ hinzu. Wiederholen Sie diesen Vorgang, bis Sie eine σ-Algebra erhalten haben].

Lösung: Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra muss insbesondere alle Komplemente, endlichen Vereinigungen und endlichen Durchschnitte der Mengen aus $\mathcal{E}$ enthalten, also neben allen Mengen aus $\mathcal{E}$ zusätzlich auch die Mengen

$$\{1,2,3\}^c = \{4\}\,, \quad \{3,4\}^c = \{1,2\}\,, \quad \bigcup \emptyset = \emptyset\,,$$

$$\{1,2,3\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\} \quad \text{und} \quad \{1,2,3\} \cap \{3,4\} = \{3\}\,.$$

Die Menge $\mathcal{E}_1$ aller bisher erhaltenen Mengen ist noch keine σ-Algebra, denn wegen

$$\{1,2\} \cup \{4\} = \{1,2,4\} \;\notin \mathcal{E}_1$$

ist $\mathcal{E}_1$ nicht unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen. Nehmen wir jedoch die vorige Menge noch zu $\mathcal{E}_1$ hinzu, so ist $\mathcal{S} := \mathcal{E}_1 \cup \big\{\{1,2,4\}\big\}$ unter endlichen Vereinigungen und Komplementen abgeschlossen (nachprüfen!) und $\emptyset \in \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S}$ eine endliche Menge ist, ist $\mathcal{S}$ folglich auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen (klar?). Also ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ per Konstruktion, folgt $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$.

Warnung: In dieser Aufgabe hatten wir es mit einer σ-Algebren auf endlichen Mengen zu tun, was eine sehr spezielle Situation ist und recht untypisch. Eine von einem Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ über einer unendlichen Menge kann im Allgemeinen **nicht** mit der eben beschriebenen Strategie in endlich oder abzählbar vielen Schritten "von unten" aufgebaut werden, siehe Bemerkung 1.7. Schauen Sie noch einmal nach, wie wir in diesem Falle $\sigma(\mathcal{E})$ "von oben kommend" konstruiert haben (im Beweis von Lemma 1.5 (b)).