Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
24.11.2014

6. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G16 (Eine stückweise definierte Funktion)

Ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}; \\ \cos x & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar?

Lösung: Die Borelmengen $X_1 := \mathbb{Q}$ und $X_2 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überdecken $\mathbb{R}$ (also $\mathbb{R} = X_1 \cup X_2$). Nach Satz 1.36 über stückweise messbare Funktionen ist f messbar, wenn $f|_{X_k} : (X_k, \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist für $k \in \{1, 2\}$. Dies aber ist der Fall: Nach Satz 1.32 ist nämlich $\mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k} = \mathcal{B}(X_k)$. Da $f|_{X_1} = \sin|_{X_1}$ und $f|_{X_2} = \cos|_{X_2}$ stetig sind, ist

$$f_k|_{X_k} : (X_k, \mathcal{B}(X_k)) = (X_k, \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

messbar nach Folgerung 1.26.

Aufgabe G17 (Eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$)

Die Abbildung $\arctan\colon \mathbb{R} \to \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist streng monoton wachsend und ein Homöomorphismus (also eine stetige Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung – dem Tangens). Somit ist auch die folgende Abbildung eine Bijektion:

$$f\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \qquad f(x) := \begin{cases} \arctan(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = \pm\infty. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass man wie folgt eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ erhält:

$$d\colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty[, \; d(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen ∞ konvergiert, wenn zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x_n \geq r$ für alle $n \geq N$.

Lösung: (a) Es seien $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir prüfen die Axiome einer Metrik nach:

M1: Ist $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = 0$, so ist $f(x) = f(y)$ und somit $x = y$, da f eine Bijektion ist.

M2: Es ist $d(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = d(x,y)$.

M3: Es gilt $d(x,z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z)$.

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$, mit Limes $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$|f(x) - f(x_n)| = d(x, x_n) \to 0$$

ist dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mit Limes $f(x) \in f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Da $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ eine Umgebung von $f(x)$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $x_n = f^{-1}(f(x_n)) \in f^{-1}(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ für $n \geq N$. Wegen der Stetigkeit des Tangens folgt nun

$$x_n = f^{-1}(f(x_n)) = \tan(f(x_n)) \to \tan(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

für $n \to \infty$ (wobei $n \geq N$), also $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$.

Gilt umgekehrt $x_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$, so gilt $f(x_n) = \arctan(x_n) \to \arctan(x) = f(x)$ für $n \to \infty$ (mit $n \geq N$) aufgrund der Stetigkeit des Arcustangens und somit

$$d(x, x_n) = |f(x) - f(x_n)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

also $x_n \to x$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

(c) Wenn $x_n \to \infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$, so folgt

$$|f(x_n) - \tfrac{\pi}{2}| = |f(x_n) - f(\infty)| = d(x, \infty) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

also $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$. Gegeben $r \in \mathbb{R}$ ist $f(r) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, also $f(r) < \frac{\pi}{2}$. Da $f(x_n) \to \frac{\pi}{2}$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $f(x_n) \geq f(r)$ für alle $n \geq \mathbb{N}$. Wegen der Monotonie von f^{-1} folgt (wie gefordert)

$$x_n = f^{-1}(f(x_n)) \geq f^{-1}(f(r)) = r \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Umgekehrt existiere nun zu jedem r ein N wie beschrieben (d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bestimmt gegen ∞ divergent). Gegeben $\vee > 0$ existiert ein $\rho \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $\rho \geq \frac{\pi}{2} - \vee$. Per Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$x_n \;\geq\; r := f^{-1}(\rho) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für $n \geq N$ ist dann $f(x_n) \geq f(r) = \rho$ und somit

$$d(\infty, x_n) \;=\; |f(\infty) - f(x_n)| \;=\; |\tfrac{\pi}{2} - f(x_n)| \;=\; \tfrac{\pi}{2} - f(x_n) \;\leq\; \vee\,.$$

Also gilt $x_n \to \infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

Aufgabe G18 (Infima und Suprema in $\overline{\mathbb{R}}$)

Beweise Lemma 1.43 der Vorlesung: Jede Teilmenge $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$.

Lösung: Es sei $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Wir zeigen die Behauptung für das Supremum. Die entsprechende Aussage für das Infimum beweis man analog. Wir unterscheiden mehrere Fälle.

1. Fall: Gilt $\infty \in A$, so ist offensichtlich $\infty = \sup(A)$.

2. Fall: Gilt $x = -\infty$ für alle $x \in A$, so ist offensichtlich $\sup(A) = -\infty$. Beachten Sie, dass diese Bedingung insbesondere für $A = \emptyset$ erfüllt ist.

3. Fall: Es sei $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Ist $A \cap \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup(A \cap \mathbb{R}) \in \mathbb{R}$, wie aus der Analysis I bekannt ist; dies ist dann auch das Supremum von A in $\overline{\mathbb{R}}$. Ist $A \cap \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so ist $\sup(A) = \infty$.