Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
05.01.2015

10. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Satz von Fubini)

Berechnen Sie das Integral $\int_A f \, d\lambda_2$, wobei ...

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; x^2 + y^3 + 2xy^2\,;$$

(b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; xy - 3\cos(x+y)\,.$$

Lösung: (a) Mit dem Satz von Fubini können wir das zu berechnende Integral zu einem iterierten Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}
\int_A f \, d\lambda_2 &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\
&= \int_{[0,1]} \Big[x^3/3 + xy^3 + x^2y^2 \Big]_{x=0}^{x=1} d\lambda_2(y) \;=\; \int_0^1 (1/3 + y^3 + y^2)\, dy \\
&= \Big[y/3 + y^4/4 + y^3/3 \Big]_0^1 \;=\; 1/3 + 1/4 + 1/3 \;=\; 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_A \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \mathbf{1}_A^{[0,\pi]^2}(x,y)\cdot\big(xy-3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi]} \underbrace{\mathbf{1}_A^{[0,\pi]^2}(x,y)}_{=\mathbf{1}_{[0,\pi-y]}^{[0,\pi]}(x)} \cdot \big(xy-3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi-y]} \big(xy-3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,\pi]} \big[x^2y/2 - 3\sin(x+y)\big]_{x=0}^{x=\pi-y}\, d\lambda_1(y) \;=\; \int_0^\pi \big((\pi-y)^2 y/2 + 3\sin y\big)\, dy \\
&= \int_0^\pi \big(\pi^2 y/2 - \pi y^2 + y^3/2 + 3\sin y\big)\, dy \;=\; \big[\pi^2y^2/4 - \pi y^3/3 + y^4/8 - 3\cos y\big]_0^\pi \\
&= \pi^4/4 - \pi^4/3 + \pi^4/8 + 6 \;=\; \pi^4/24 + 6\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe G29 (Ebene Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Abbildung $P\colon [0,\infty[\,\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $P(r,\phi) := \big(r\cos\phi,\, r\sin\phi\big)$. Skizzieren Sie die Menge A und das Bild $P(A)$ in den folgenden Fällen:

(a) $A := \,]0,1[\,\times\,]0,2\pi[\,$;

(b) $A := \,]0,1[\,\times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,$.

Ist $P|_A\colon A\to P(A)$ ein Diffeomorphismus?

Lösung: In beiden Fällen ist $P|_A : A \to P(A)$ ein Diffeomorphismus, denn dies ist eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ derart, dass $\det P'(r,\phi) = r \neq 0$ für alle $(r,\phi)\in A$ (so dass nach dem Satz über die Umkehrabbildung $(P|_A)^{-1}\colon P(A)\to A$ ebenfalls stetig differenzierbar ist).

Aufgabe G30 (Transformation von Hand)

Sei V die von den folgenden Graden umschlossene offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$y = x;\quad y = 2x;\quad y + x = 1;\quad y + x = 3.$$

Skizzieren Sie V und berechnen Sie mit der Transformationsformel das Integral

$$\int_V \frac{y}{x}\, d\lambda(x,y).$$

Lösung: Es gilt

$$V = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{y}{x}\in\,]1,2[\text{ und } x+y\in\,]1,3[\right\}.$$

Wir definieren die Menge $U :=]1,2[\times]1,3[$ und die Funktion

$$\psi \colon V \to U,\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{y}, x+y\right).$$

Die Abbildung ψ ist ein Diffeomorphismus, denn ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi \colon U \to V,\ (m,s) \mapsto \left(\frac{s}{1+m}, \frac{sm}{1+m}\right).$$

Es gilt

$$J_\varphi(m,s) = \begin{pmatrix} \frac{-s}{(1+m)^2} & \frac{1}{m+1} \\ \frac{s}{(1+m)^2} & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix}$$

Und somit

$$|det\varphi'(m,s)| = \frac{s}{(1+m)^2}.$$

Wir definieren $f \colon V \to [0,\infty[,\ (x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\int_V f d\lambda = \int_U f \circ \varphi(m,s)|\det(\varphi'(m,s))| d\lambda(m,s) = \int_U \frac{1+m}{s} \cdot \frac{s}{(1+m)^2} \lambda(m,s)$$
$$= \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{m+1} dm ds = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$