Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
26.01.2015

13. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G37 (Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$)

Skizzieren Sie grob die Mengen und begründen Sie, welche davon 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\}\ ;\quad L := \mathbb{R} \times \{0\}\ ;\quad G := \{(x, \sin(x)) : x \in]0,\pi[\}\ ;$$

$$R := \partial\left([0,1]^2\right);\quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\};\quad M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(1-x^2)\}.$$

Lösung: E ist eine Ellipse. Diese ist die Nullstellenmenge

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

der stetig differenzierbaren Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + 4y^2 - 1$, wobei

$$\nabla f(x,y) = \big(2x,\, 8y\big) \neq (0,0)$$

für alle $(x,y) \in E$ (da $(x,y) \neq 0$). Also ist E eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. L ist die x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Diese ist die Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := y\,.$$

Da $\nabla f(x,y) = (0,1) \neq 0$ für alle $(x,y) \in L$, ist L eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. G ist der Graph der stetig differenzierbaren Funktion $h \colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$, $h(x) := \sin x$ und somit, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Von Hand sieht man dies wie folgt:

$$f \colon]0,\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := h(x) - y$$

ist stetig differenzierbar, hat G als Nullstellenmenge, und es ist $\nabla f(x,y) = (h'(x), -1) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in G$. R ist der Rand eines Quadrats. Da Mannigfaltigkeiten “glatte” Objekte sind, machen uns die “Ecken” von R bereits misstrauisch. Um mathematisch auf den Punkt zu bringen, dass R tatsächlich keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, benutzen wir, dass jede solche Untermannigfaltigkeit lokal der Graph einer Funktion von x oder von y ist (wie in der Vorlesung gezeigt wurde). Die Punkte von R in der Nähe der Ecke $(0,0)$ lassen sich jedoch offensichtlich nicht in der Form $(x, f(x))$ beschreiben (weil $\{0\} \times [0,1] \subseteq R$, sind viele verschiedene y-Werte möglich, nicht nur einer!) Ebenso lassen sich die Punkte dort nicht in der Form $(f(y), y)$ beschreiben. D ist die offene Einheitskreisscheibe, also eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und somit eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Jedoch ist D keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, denn nahe $(0,0)$ ist D weder der Graph einer Funktion von x noch einer Funktion von y. Die Menge M, die aussieht wie eine liegende "8," ist keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die "Problemstelle" ist die Überkreuzung im Punkt $(0,0)$. Es ist anschaulich klar, dass es keine Umgebung U von $(0,0)$ gibt, deren Durchschnitt mit M der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von x oder von y ist.

Präzise Begründung: Für alle $x \in]0,1[$ gibt es zwei verschiedene Zahlen, $y_\pm(x) := \pm x\sqrt{1-x^2}$, mit $(x, y_\pm) \in M$. Da $y_\pm(x) \to 0$ für $x \to 0$, gibt es ein $\vee > 0$ derart, dass $(x, y_\pm(x)) \in M \cap U$ für alle $x \in]0, \vee[$. Wäre $M \cap U$ der Graph einer Funktion f von x, so dürfte es zu gegebenem x jedoch nur einen einzigen Wert y (nämlich $y = f(x)$) geben mit $(x,y) \in M \cap U$. Analog sehen wir durch Auflösen nach x^2 und dann nach x, dass $M \cap U$ nicht der Graph einer Funktion von y ist.

Aufgabe G38 (Reihen von Maßen)

Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen μ_j auf $(X, \mathcal{S})$. In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Doppelreihensatzes (Folgerung 3.27) gezeigt, dass auch $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$, $\mu(A) := \sum_{j=1}^\infty \mu_j(A)$, ein Maß ist.

(a) Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der Integrationstheorie (siehe Vorlesung), dass für jede nicht-negative messbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ gilt:

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \left(\int_X f\, d\mu_j \right) . \tag{1}$$

Hinweis für Schritt 3: Nach Folgerung 3.26 ist der Satz über monotone Konvergenz auch für Reihen von Zahlen in $[0,\infty]$ gültig.

(b) Zeigen Sie: Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. μ über X integrierbar, so ist f für jedes $j \in \mathbb{N}$ bzgl. μ_j über X integrierbar und es gilt (1).

[Spalten Sie f in Positiv- und Negativteil auf und benutzen Sie (a)!]

Lösung: (a) Sei zunächst $f = \mathbf{1}_A$ charakteristische Funktion einer Menge $A \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\int_X \mathbf{1}_A\, d\mu = \mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu_j(A) = \sum_{j=1}^\infty \int_X \mathbf{1}_A\, d\mu_j\, ,$$

wie verlangt. Ist nun $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $\alpha_k \geq 0$ mit paarweise disjunkten Mengen $A_k \in \mathcal{S}$, so folgt aus dem Vorigen

$$\begin{aligned}\int_X s\,d\mu &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X \mathbf{1}_{A_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^\infty \int_X \mathbf{1}_{A_k}\,d\mu_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X \mathbf{1}_{A_k}\,d\mu_j = \sum_{j=1}^\infty \int_X s\,d\mu_j\,,\end{aligned}$$

wie gewünscht. Ist nun $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, so sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert (Satz 3.4). Nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt dann

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\underbrace{\int_X f\,d\mu_j}_{=:a(j)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_X s_n\,d\mu_j}_{=:a_n(j)} \tag{3}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Beachte, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $a_n\colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$ punktweise monoton wächst und punktweise gegen $a : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ konvergiert. Indem wir mittels Folgerung 3.26 Reihen als Integrale bzgl. des Zählmaßes ζ auf $\mathbb{N}$ umschreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty \int s_n\,d\mu_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty a_n(j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} a_n\,d\zeta = \int_{\mathbb{N}} \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\,d\zeta = \int_{\mathbb{N}} a\,d\zeta \\ &= \sum_{j=1}^\infty a(j) = \sum_{j=1}^\infty \int_X f\,d\mu_j\end{aligned}$$

unter Benutzung von (2), (3), des bereits für Stufenfunktionen Gezeigten und des Satzes über monotone Konvergenz (für das fünfte Gleichheitszeichen).

Aufgabe G39 (Injektive Immersionen vs. Einbettungen)

Wir betrachten die Funktion

$$\gamma :]-2,\ \tfrac{3\pi}{2}+1[\ \to\ \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) := \begin{cases} (1,\ t) & \text{für } t \in\ ]-2,\ 0]; \\ (\cos t,\ \sin t) & \text{für } t \in [0,\ 3\pi/2]; \\ (t - 3\pi/2,\ -1) & \text{für } t \in [3\pi/2,\ 3\pi/2+1[. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie das Bild M von γ. Begründen Sie kurz, dass γ stetig differenzierbar ist (Vergleich rechts- und linksseitiger Ableitungen !)

(b) Zeigen Sie, dass γ eine injektive Immersion ist, aber keine Einbettung. Ist $M = \operatorname{im}\gamma$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$?

Lösung: (a) Die Einschränkung von γ auf $]-2,0]$ ist stetig differenzierbar, mit $\gamma'(t) = (0,1)$. Die Einschränkung von γ auf $[0, 3\pi/2]$ ist stetig differenzierbar, mit $\gamma'(t) = (-\sin t,\, \cos t)$, also $\gamma'(0) = (0,1)$ und $\gamma'(3\pi/2) = (1,0)$. Die Einschränkung auf $]3\pi/2,\, 3\pi/2 + 1[$ ist stetig differenzierbar, mit $\gamma'(t) = (1,0)$. An den zwei "Nahtstellen" ($t = 0$ bzw. $t = 3\pi/2$) stimmt also die rechts- und linksseitige Ableitung von γ überein. Somit ist γ stetig differenzierbar.

(b) Da γ stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t (wie die vorigen Formeln zeigen), ist γ eine Immersion. Offensichtlich (siehe Skizze) ist γ injektiv. Jedoch ist γ keine Einbettung. Setzen wir nämlich $x_n := (1 - 1/n,\, -1)$, so gilt $x_n \to (1,-1) = \gamma(-1)$ für $n \to \infty$, aber $\gamma^{-1}(x_n) = 3\pi/2 + 1 - 1/n \to 3\pi/2 + 1$. Also

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{-1}(x_n) \;=\; 3\pi/2 + 1 \;\neq\; -1 \;=\; \gamma^{-1}\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)\,.$$

Somit ist γ^{-1} unstetig.