Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
24.11.2014

6. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H16 (Translationsinvarianz von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; 3 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir (u.a.) zeigen, dass eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Borelmenge ist, wenn die verschobene Menge $x + A := \{x + y : y \in A\}$ eine Borelmenge ist (wobei $x \in \mathbb{R}^n$). Zeigen Sie hierzu:

(a) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen und ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X, so gilt für die direkten Bilder:

$$g_*(f_*(\mathcal{S})) = (g \circ f)_*(\mathcal{S}).$$

(b) Sind X und Y metrische Räume und $f: X \to Y$ stetig, so ist $\mathcal{B}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$. [Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathcal{O}_Y \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$, wobei $\mathcal{O}_Y := \{U \subseteq Y : U \text{ ist offen}\}$.]

(c) Ist f in (b) ein Homöomorphismus (vgl. Aufgabe G20), so ist $f_*(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ unter Translationen invariant ist, d.h.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \{x + A : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lösung: (a) Für $A \subseteq Z$ sind äquivalent:

$$\begin{aligned} A \in g_*(f_*(\mathcal{S})) &\Leftrightarrow g^{-1}(A) \in f_*(\mathcal{S}) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in (g \circ f)_*(\mathcal{S}), \end{aligned}$$

da ja $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Somit $g_*(f_*(\mathcal{S})) = (g \circ f)_*(\mathcal{S})$.

(b) Für jede offene Teilmenge U von Y ist $f^{-1}(U)$ in X offen, da f stetig ist. Also gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$ und somit $f^{-1}(U) \in \sigma(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}(X)$. Dies bedeutet, dass $\mathcal{O}_Y \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$. Da $f_*(\mathcal{B}(X))$ eine σ-Algebra ist, folgt $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{O}_Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X))$.

(c) Nach Teil (b) gilt

$$\mathcal{B}(Y) \subseteq f_*(\mathcal{B}(X)) \tag{1}$$

und

$$\mathcal{B}(X) \subseteq (f^{-1})_*(\mathcal{B}(Y)). \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$f_*(\mathcal{B}(X)) \subseteq f_*((f^{-1})_*(\mathcal{B}(Y))); \tag{3}$$

sind nämlich $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ σ-Algebren auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, so gilt offensichtlich $f_*(\mathcal{S}) \subseteq f_*(\mathcal{T})$. Für die rechte Seite von (3) erhalten wir nach Teil (a)

$$f_*((f^{-1})_*(\mathcal{B}(Y))) = (f \circ f^{-1})_*(\mathcal{B}(X)) = \mathrm{id}_*(\mathcal{B}(Y)) = \mathcal{B}(Y).$$

Also gilt $f_*(\mathcal{B}(X)) \subseteq \mathcal{B}(Y)$. In Verbindung mit (1) ergibt sich $\mathcal{B}(Y) = f_*(\mathcal{B}(X))$.

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Translation

$$\tau_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad \tau_x(y) := x + y$$

ein Homöomorphismus, denn τ_x stetig und die stetige Funktion τ_{-x} ist die Umkehrfunktion zu τ_x (z.B. ist $(\tau_x \circ \tau_{-x})(y) = x + (-x) + y = y$).

Da τ_x ein Homöomorphismus ist, erhalten wir mit Teil (c):

$$(\tau_x)_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \;=\; \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Da $(\tau_x)^{-1}(A) = \tau_{-x}(A) = A - x$, ist dann

$$\begin{aligned}(\tau_x)_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) &= \{A \subseteq \mathbb{R}^n \colon (\tau_x)^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}\\ &= \{A \subseteq \mathbb{R}^n \colon A - x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}\\ &= \{A + x \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H17 (Zur Addition in $\overline{\mathbb{R}}$; 3 Punkte)

Wir setzen die übliche Addition reeller Zahlen fort durch $x + (\pm\infty) := (\pm\infty) + x := \pm\infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die Ausdrücke "$\pm\infty + (\mp\infty)$" bleiben undefiniert.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die Summe $x + (y + z)$ genau dann definiert, wenn die Summe $(x + y) + z$ definiert ist (also Ausdrücke wie $\infty + (-\infty)$ bei der Berechnung nicht auftreten). In diesem Falle gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(b) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$, mit Limes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: Wenn $x + y$ definiert ist, so ist auch $x_n + y_n$ für alle genügend großen n definiert, und es gilt $x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. Also

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n \;+\; \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

[Arbeiten Sie direkt mit Definition 1.41, **nicht** mit der Metrik aus Aufgabe G20!]

Lösung: (a) Es seien $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

• Der Fall $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist klar, denn $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

• Sind $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und ist mindestens eines der Elemente ∞, so sind offensichtlich $x + (y + z)$ und $(x + y) + z$ definiert und beide haben den Wert ∞. Analog verfährt man, wenn $x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und eines der Elemente $-\infty$ ist.

• In allen anderen Fällen ist mindestens eines der Elemente ∞, mindestens eines der

Elemente $-\infty$. Dann sind beide Summen nicht definiert. Um dies einzusehen, können Sie z.B. alle 12 verbliebenden Fälle durchgehen. Alternative Begründung: Für $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $a+\infty = \infty$, wann immer die Summe definiert ist (also für $a \neq -\infty$). Wäre also $x+(y+z)$ definiert, so müsste der Wert ∞ angenommen werden. Andererseits gilt $a+(-\infty) = -\infty$ für $a \in \overline{\mathbb{R}}$, wann immer die Summe definiert ist (also für $a \neq \infty$). Wäre also $x + (y + z)$ definiert, so müsste der Wert $-\infty$ angenommen werden, im Widerspruch dazu, dass nach dem Vorigen der Wert ∞ sein müsste. Genauso verfährt man mit $(x + y) + z$.

(b) • Sind x und y reell, so auch x_n und y_n für große n, und $x_n \to x$, $y_n \to y$ in $\mathbb{R}$ (per Definition konvergenter Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit Grenzwert in $\mathbb{R}$). Da die Addition reeller Zahlen stetig ist, ist $x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ in $\mathbb{R}$, also auch in $\overline{\mathbb{R}}$.

• Sei $x = \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_n + y_n \to \infty = x + y$. Um dies einzusehen, sei $r \in \mathbb{R}$. Da $y_n \to y \in \mathbb{R}$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $y_n \in \mathbb{R}$ und $y_n \geq y - 1$ für alle $n \geq N$. Da $x_n \to \infty$, existiert ein $M \geq N$ derart, dass $x_n \geq r - y + 1$ für alle $n \geq M$. Dann ist $x_n + y_n$ definiert und

$$x_n + y_n \;\geq\; r - y + 1 + y - 1 \;=\; r\,, \quad \text{für alle } n \geq M.$$

Somit ist $x_n + y_n \to \infty$ gezeigt.

• Die Fälle $(x, y) \in \{-\infty\} \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{-\infty, \infty\}$ diskutiert man analog.

• Wir diskutieren noch den Fall $x = y = \infty$ (den Fall $x = y = -\infty$ behandelt man analog). Gegeben $r \in \mathbb{R}$ existieren $N, M \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \geq r$ für alle $n \geq N$ und $y_n \geq 0$ für alle $n \geq M$. Für alle $n \geq \max\{N, M\}$ ist dann $x_n + y_n$ definiert und $x_n + y_n \geq r + 0 = r$. Also $x_n + y_n \to \infty = x + y$.

Aufgabe H18 (Limites in $\overline{\mathbb{R}}$; 3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.45 (a) und (d) sowie die erste Hälfte von (c).

Hinweis: Einige der auftretenden Fälle sind aus der Analysis I bekannt und brauchen nicht erneut bewiesen werden.

Lösung: Beweis von Lemma 1.45 (a): Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge. Wir führen die gleiche Fallunterscheidung durch wir im Beweis von Lemma 1.42.

1. Fall: Ist $a_n = -\infty$ für alle n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Fall: Ist $a_n = \infty$ für genügend große n, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. Fall: Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und ist $(a_n)_{n\geq N}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so wissen wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq N\} = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ aus der Analysis I.

4. Fall: Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq N$ und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis von Lemma 1.45 (c): Da die Folge $(\sup\{a_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt nach Teil (b) von Lemma 1.45 (den man analog zu (a) beweist)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{a_k : k \geq n\}\,.$$