Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15

08.12.2014

8. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Hausübungen

Aufgabe H22 (Konvergenzsätze; 3 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx\sin(x)}{n^3x^2+1}\, d\lambda(x)\,; \qquad \text{(b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x}\, d\lambda(x)\,.$$

Lösung: (a) Die Funktionen $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx\sin(x)}{n^3x^2+1} = \frac{x\sin(x)}{n^2x^2+1/n}$ sind messbar, nicht-negativ und konvergieren punktweise gegen 0. Können wir eine integrierbare Majorante finden, so gilt also nach dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx\sin(x)}{n^3x^2+1}\, d\lambda(x) \;=\; \int_{[0,1]} 0\, d\lambda \;=\; 0\,.$$

Wir zeigen nun, dass $f_n(x) \leq \frac{1}{2} =: g(x)$ für alle $x\in[0,1]$; die konstante Funktion g mit $\int_{[0,1]} g\, d\lambda = \frac{1}{2} < \infty$ ist dann also die geforderte Majorante. Da $|\sin(x)|\leq 1$, genügt es zu zeigen, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Funktion

$$f\colon [0,\infty[\,\to\mathbb{R}\,, \qquad f(x) \;:=\; \frac{nx}{n^3x^2+1}$$

durch $\frac{1}{2}$ nach oben beschränkt ist. Offensichtlich gilt $f(0)=0$, $f(x)>0$ für $x>0$ und $f(x)\to 0$ für $x\to\infty$. Die Funktion f muss daher ein globales Maximum annehmen. Wir zeigen, dass $f'(x_0)=0$ für genau ein x_0; das Maximum wird dann notwendig in x_0 angenommen. Die Quotientenregel liefert

$$f'(x) \;=\; \frac{n-n^4x^2}{(n^3x^2+1)^2}\,;$$

also gilt $f'(x_0)=0$ genau dann, wenn $1-n^3x_0^2=0$, also $x_0 = 1/\sqrt{n^3}$. Das Maximum von f ist also

$$f(x_0) \;=\; \frac{n/\sqrt{n^3}}{n^3/n^3+1} \;=\; \frac{1/\sqrt{n}}{2} \;\leq\; \tfrac{1}{2}\,.$$

(b) Wir wissen aus der Analysis I, dass $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$; die Integranden

$$f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) \;:=\; \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x}$$

sind also messbare nicht-negative Funktionen, die punktweise gegen die konstante Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ konvergieren Wir zeigen nun, dass die Funktionenfolge f_n monoton wächst; mit dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\, d\lambda(x) \;=\; \int_{[0,1]} 1\, d\lambda \;=\; 1\,.$$

Können wir zeigen, dass für jedes feste $x \in [0,1]$ die Hilfsfunktion $g : [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) := (1+\frac{x}{t})^t = e^{t\ln(1+\frac{x}{t})}$ monoton wächst, so sind wir fertig. Wir berechnen die Ableitung:

$$g'(t) \;=\; \left(\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) \;-\; \frac{x/t}{1+x/t}\right) e^{t\ln(1+\frac{x}{t})}\,.$$

Beachten Sie, dass hier $x/t \in [0,1]$. Also gilt $g(t) > 0$ für alle t, wenn wir zeigen können, dass die Funktion

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,, \qquad h(u) \;:=\; \ln(1+u) \;-\; \frac{u}{1+u}$$

nicht negativ ist. Dies ist der Fall, denn es ist $h(0) = 0$ und wegen

$$h'(u) \;=\; \frac{u}{(1+u)^2} \;\geq\; 0$$

ist die Funktion h monoton wachsend.

Aufgabe H23 (Stufenfunktionen; 3 Punkte)

Wir betrachten die nicht-negativen messbaren Funktionen $f_1, f_2\colon [0,1] \to [0,\infty[$,

$$f_1(x) \;:=\; x\,; \qquad f_2(x) := 1 - x\,.$$

Da $f_1 + f_2 = 1$, ist dann $s\colon [0,1] \to [0,\infty[$, $s(x) := 1$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $s \leq f_1 + f_2$.

Zeigen Sie, dass es keine nicht-negativen Stufenfunktionen $s_1, s_2 : [0,1] \to [0,\infty[$ gibt derart, dass $s_1 \leq f_1$, $s_2 \leq f_2$ und $s_1 + s_2 = s$.

Lösung: Wir nehmen an, dass s_1 und s_2 existieren und führen diese Annahme zum Widerspruch. Es sei $x \in [0,1]$. Wäre $s_1(x) < f_1(x)$, so wäre wegen $s_2(x) \leq f_2(x)$

$$s_1(x) + s_2(x) \;<\; f_1(x) + f_2(x) \;=\; 1\,.$$

Jedoch ist $s_1(x) + s_2(x) = s(x) = 1$, Widerspruch. Also muss $s_1(x) = f_1(x)$ gelten für alle $x \in [0,1]$. Somit ist $s_1 = f_1$; da f_1 keine Stufenfunktion ist, widerspricht dies unserer Annahme, dass s_1 eine Stufenfunktion ist. Also können s_1 und s_2 nicht existieren.

Aufgabe H24 (Verschiedenes; 3 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum.

(a) Zeigen Sie: Sind f und g messbare Funktionen $(X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so ist $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{S}$. Hinweis: Betrachten Sie $f - g$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass auch für messbare Funktionen $f, g\colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ die Menge $A := \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ messbar ist. Folgern Sie, dass $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

Hinweis: Es ist $A = f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{-\infty\}) \cup \{x \in E : f(x) \geq g(x)\}$ mit $E := f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent ist, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(d) (Messbarkeit der Menge der Konvergenzstellen). Schließen Sie aus (b) und (c): Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, so ist $\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{S}$.

(e) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $f_*(\mathcal{S}) := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{S})$ das direkte Bild. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $g\colon Y \to Z$ in einen Messraum $(Z, \mathcal{T})$ genau dann bzgl. $f_*(\mathcal{S})$ messbar ist, wenn $g \circ f\colon (X, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{T})$ messbar ist.

Lösung: (a) Lösung laut Anleitung: Nach Satz 1.30 ist die Funktion $h := f - g\colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Da $[0, \infty[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, folgt

$$\{x \in X\colon f(x) \geq g(x)\} \;=\; \{x \in X\colon f(x) - g(x) \geq 0\} \;=\; h^{-1}([0, \infty[) \;\in \mathcal{S}\,.$$

Zweite Lösung:[1] Die Funktion $h := (f, g)\colon X \to \mathbb{R}^2$ ist nach Satz 1.29 messbar. Da die Menge $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, ist $P \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und somit $\{x \in X\colon f(x) \geq g(x)\} = h^{-1}(P) \in \mathcal{S}$.

(b) Es gilt $\{\infty\}, \{-\infty\}, \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Da die Funktionen f und g messbar sind, ist also $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{S}$, $g^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$ und $E := f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{S}$. Die Einschränkungen $f|_E$ und $g|_E$ sind nach Beispiel 1.24 und Satz 1.39 (d) messbar als Funktionen $(E, \mathcal{S}|_E) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nach Teil (a) gilt also $\{x \in E\colon f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}|_E \subseteq \mathcal{S}$ (da $E \in \mathcal{S}$). Also $A = f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{-\infty\}) \cup \{x \in E\colon f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{S}$.

(c) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ nach Lemma 1.45 (d) und analog $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. Limes superior und inferior stimmen also überein.

Umgekehrt gelte nun $a := \liminf a_n = \limsup a_n$. Sind beide Werte endlich, existiert zu $\vee > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\inf \{a_k\colon k \geq n\} \in \mathbb{R}$, $\sup \{a_k\colon k \geq n\} \in \mathbb{R}$ und

$$a - \vee \leq \inf \{a_k\colon k \geq n\} \quad \text{sowie} \quad a + \vee \geq \sup \{a_k\colon k \geq n\}$$

für alle $n \geq N$. Also gilt $a - \vee \leq a_k \leq a + \vee$ für alle $k \geq N$. Im Falle $a \in \mathbb{R}$ konvergiert also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

[1] Mit diesem zweiten Lösungsweg könnte man eigentlich Teil (b) auch direkt (ohne das dort vorgeschlagene Zerlegen) lösen, jedoch wurden die nötigen Hilfsmittel (z.B. Satz 1.29) in der Vorlesung nur für Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ bewiesen (um nicht über eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}^n$ und Ähnliches reden zu müssen).

Wir diskutieren noch den Fall $a = \infty$ (den Fall $a = -\infty$ behandelt man analog). Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ existiert wegen $\infty = \liminf_{n\to\infty} a_n \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$r \leq \inf\{a_k : k \geq n\}$$

für alle $n \geq N$. Also gilt $a_k \geq r$ für alle $k \geq N$. Somit $a_k \to \infty$.

(d) Nach (c) ist $\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}}\} = \{x \in X : \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}$. Da $\liminf f_n$ und $\limsup f_n$ nach Satz 1.47 messbare Funktionen sind, ist vorige Menge nach Teil (b) messbar.

(e) Für $A \in \mathcal{T}$ sind per Definition von $f_*(\mathcal{S})$ äquivalent:

$$g^{-1}(A) \in f_*(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{S}\,.$$

Also ist g genau dann messbar, wenn $g \circ f$ es ist.