Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2015/16
16.12.2015

8. Übungsblatt zur „Höheren Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Verallgemeinerte Geometrische Reihe)

Seien $q_1, \dots, q_n \in [0,1[$ und $q := (q_1, \dots, q_n)$. Zeigen Sie, dass $(q^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ summierbar ist und

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q^\alpha = \frac{1}{1-q_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-q_n}.$$

Wie üblich verwenden wir die Multiindexschreibweise $q^a = q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{\alpha_n}$.

Lösung: Wir machen eine Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Nun schreiben wir $\mathbb{N}_0^n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_0^{n-1} \times \{i\}$. Wir schreiben $\tilde{q} := (q_1, \dots, q_{n-1})$. Lesen wir die folgende Gleichung von rechts nach links, so folgt die Aussage:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q^\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \{i\}} q^\alpha = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} q_n^i \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \tilde{q}^\beta = \frac{1}{1-q_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-q_n}.$$

Aufgabe G23 (Beschränktheit von Netzen?)

(a) Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie von Elementen eines Banachraums E. Mit $\mathcal{F}$ sei die Menge der endlichen Teilmengen von I bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Menge der endlichen Teilsummen

$$\left\{ \sum_{i \in F} x_i : F \in \mathcal{F} \right\}$$

in E beschränkt ist.

(b) Gilt im Allgemeinen, dass die Menge der Glieder eines konvergenten Netzes in einem Banachraum beschränkt ist?

Lösung:

(a) Es gibt eine endliche Menge $I_0 \subseteq I$, sodass für alle $G \subseteq I \setminus I_0$ endlich

$$\left\| \sum_{i \in G} x_i \right\| < 1$$

gilt. Also ist die Menge $\left\{\sum_{i\in G} x_i | G \subseteq I \setminus I_0 \text{endlich}\right\}$ beschränkt. Ist $G \subseteq I$ endlich, so gilt $\sum_{i\in G} = \sum_{i\in G\setminus I_0} x_i + \sum_{i\in G\cap I_0} x_i$. Wir folgern

$$\left\{\sum_{i\in G} x_i | G \subseteq I \text{endlich}\right\} \subseteq \bigcup_{M\subseteq I_0} \left\{\sum_{i\in G} x_i | G \subseteq I \setminus I_0 \text{endlich}\right\} + \sum_{i\in M} x_i.$$

Es folgt die Aussage.

(b) Wir statten $\mathbb{R}$ mit der folgenden Ordnung aus: $\alpha \leq_2 \beta :\Leftrightarrow |\beta| \leq |\alpha|$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Das Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ mit $x_\alpha = \alpha$ konvergiert gegen 0. Es gilt aber $\{x_\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Aufgabe G24 (Potenzreihen in mehreren Variablen)

Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ eine Familie in $\mathbb{C}$ und $(a_\alpha x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ eine summierbare Familie in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(a_\alpha y^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ für alle y im *Polyzylinder*

$$P := B^{\mathbb{C}}_{|x_1|}(0) \times \ldots \times B^{\mathbb{C}}_{|x_n|}(0)$$

absolut summierbar ist. Insbesondere existiert also der Grenzwert $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha y^\alpha$ in $\mathbb{C}$ für alle $y \in P$.

Lösung: Die Familie $(a_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ ist sogar absolut summierbar. Sei $M \in]0, \infty[$, sodass $\sum_{\alpha\in G} |a_\alpha x_\alpha| < M$ für $G \subseteq \mathbb{N}_0^n$ endlich (siehe G23). Sei nun $y \in P$, etwa $y_j = z_j \cdot x_j$ mit $z_j \in B_1^{\mathbb{C}}(0)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $I_0 \subseteq \mathbb{N}_0^n$ endlich, sodass $\sum_{\alpha\in G} |z_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{\alpha_n} < \frac{\varepsilon}{M}$ für alle $G \subseteq \mathbb{N}_0^n \setminus I_0$ endlich. Nun rechnen wir

$$\sum_{\alpha\in G} |a_\alpha y^\alpha| = \sum_{\alpha\in G} |z_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{\alpha_n} \cdot \underbrace{|a_\alpha x^\alpha|}_{\leq M} \leq M \cdot \sum_{\alpha\in G} |z_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{\alpha_n} < \varepsilon.$$