

Vorlesungsskript zur Mathematik 3 für Maschinenbauer im WS 2022/23

Prof. Dr. Helge Glöckner

Überblick

Die Mathematik 3 behandelt

- Differentialgleichungen (Wiederholung von Beispielklassen aus der Mathematik 2; Systeme linearer Differentialgleichungen, Variation der Konstanten, Lösung linearer Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation)
- Mehrdimensionale Integralrechnung (u.a. Volumina von Körpern, Integrale über mehrdimensionale Bereiche, Integralsätze)
- Ergänzende Themen (Numerische Lösungsverfahren für Differentialgleichungen; Fouriertransformation; Beschreibende Statistik)

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Gewöhnliche Differentialgleichungen

§1 Wiederholung von Beispielklassen aus der Mathematik 2 1

Grundbegriffe; homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung; inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung; Variation der Konstanten; Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen; lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten; Lösungsfundamentalsysteme für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Wronski-Determinante, harmonischer Oszillator, gedämpfter Oszillator; inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, getriebener Oszillator; lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, Matrix-Exponentialfunktion, Variation der Konstanten, Lösungsfundamentalsystem, Exponentialansatz

§2 Wie man e^A berechnet für eine Matrix A 20

Matrixexponentialfunktion u.a- für Diagonalmatrizen, nilpotente Matrizen, diagonalisierbare Matrizen, Jordan-Blöcke, A in Jordanscher Normalform

§3 Beispiele für Differentialgleichungssysteme 27

Mischprozesse; gekoppelte Oszillatoren; kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage

§4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 36

Umschreiben von Differentialgleichungen m ter Ordnung als System erster Ordnung, Lösungsfundamentalsysteme

§5 Laplace-Transformation und lineare Differentialgleichungen . 40

Laplace-Transformierte einer Funktion, Lösung von Anfangswertproblemen mittels Laplace-Transformation, Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion, Sätze über Laplace-Transformierte (Ableitungssatz, Ähnlichkeitsatz, Dämpfungssatz, Verschiebungssatz)

§6 Lösung von Differentialgleichungen mit Potenzreihenansatz . 58

Die Methode und ein Beispiel

Teil II: Mehrdimensionale Integralrechnung

§7 Integration in \mathbb{R}^n 61

Integrale über Quader, Satz von Fubini, Riemannsche Summen, Jordan-messbare Mengen und ihr Volumen, Jordan-Nullmengen, Integrale über Jordan-messbare Mengen, Beispiele: Massen und Schwerpunkte; Integrale über Normalbereiche. Transformationsformel, Integral in ebenen Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und räumlichen Polarkoordinaten: Integral einer Glockenkurve, Rotationskörper

§8 Kurven, Bogenlänge, Kurvenintegrale 107

Wege, vektorwertige Integrale, Weglänge, Kurvenintegrale erster Art, Wegintegrale zweiter Art, Verhalten bei Umparametrisierung

§9 Existenz von Potentialfunktionen 117

Integrabilitätsbedingung, Gradient, Potentialfunktion, Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, sternförmige Mengen, konvexe Mengen, Methode der sukzessiven Integration; Rotation eines Vektorfelds im Raum

§10 Flächen im Raum, Flächeninhalte, Integrale über Flächen . 126

Parametrisierte Flächenstücke, Flächeninhalt, Flächenintegrale erster Art, Standard-Normalenfeld, Einheits-Normalenfeld, Flächenintegrale zweiter Art (Flussintegrale), zusammengesetzte Flächen

§11 Der Gaußsche Integralsatz 137

Kompakta mit C^1 -Rand, äußeres Normalenfeld, Divergenz, Gaußscher Integralsatz, Quellendichte, quellenfreies Vektorfeld. Anwendung: Archimedisches Prinzip

§12 Der Stokes'sche Integralsatz 141

Stokesscher Integralsatz, Wirbeldichte, wirbelfreie Vektorfelder

§13 Der Cauchysche Integralsatz 143

Komplex differenzierbare Funktionen, komplexe Kurvenintegrale, Lemma von Goursat (Spezialfall des Cauchyschen Integralsatzes); Berechnung eines uneigentlichen Integrals

Teil III: Weitere Themen

§14 Fourier-Transformation 160

Definition von Fouriertransformierten; Beispiele: Fouriertransformierte eines Rechteckimpulses und Beugung am Einfachspalt; Fouriertransformierte einer Glockenkurve. Eigenschaften der Fouriertransformation (u.a. Ableitungssatz, Ähnlichkeitssatz, Linearität, Verschiebungssatz); Fouriersche Umkehrtransformation, Umkehrsatz für schnellfallende Funktionen und für stückweise stetig differenzierbare Funktionen

§15 Mehr über allgemeine Differentialgleichungen 175

Lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen für allgemeine (nicht notwendig lineare) Differentialgleichungen; Lipschitzbedingung, lokale Lipschitzbedingung; globale Existenz von Lösungen für Anfangswertprobleme, Picard-Iteration.

§16 Numerische Lösung von Differentialgleichungen 186

Eulerverfahren, Konvergenz des Eulerverfahrens und allgemeinerer Einschrittverfahren, Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

§17 Beschreibende Statistik 199

Kennzahlen für eindimensionale Messreihen (u.a. arithmetisches Mittel, Median, Spannweite, empirische Varianz, empirische Standardabweichung, Quartile und Quartilsabstand). Kennzahlen für zweidimensionale Messreihen (Mittelwerte, empirische Varianzen, empirische Kovarianz), Regressionsgeraden (Methode der kleinsten Quadrate)

Anhänge: A Details zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz 208

B Mehr über Einschrittverfahren 216

C Details zum Runge-Kutta-Verfahren 221

Literatur zur Vorlesung 247

Teil I: Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Wiederholung von Beispielklassen aus der Mathematik 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen spielen in allen Naturwissenschaften eine wichtige Rolle.

1.1 Differentialgleichungen erster Ordnung sind von der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

wobei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ ist.¹ Eine *Lösung* der DGL (Differentialgleichung) (1) ist eine stetig differenzierbare Funktion $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem nicht-entarteten² Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass

$$(t, \phi(t)) \in U \quad \text{für alle } t \in I$$

und $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ für alle $t \in I$. Ist $(t_0, y_0) \in U$ gegeben und gilt zusätzlich $t_0 \in I$ und

$$\phi(t_0) = y_0,$$

so wird ϕ eine *Lösung des Anfangswertproblems* (AWP)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

genannt.

Ist $n \geq 2$, spricht man traditionell auch von einem *System* von Differentialgleichungen.

Beispiel 1.2 Gegeben $k > 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ rechnet man sofort nach, dass

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y_0 e^{kt}$$

das Anfangswertproblem

$$y'(t) = k y(t), \quad y(0) = y_0$$

¹Wir betrachten nur Differentialgleichungen in expliziter Form, keine in impliziter Form wie $g(t, y(t), y'(t)) = 0$.

² I hat also mehr als ein Element.

löst. Es ist nämlich $\phi(0) = y_0 e^0 = y_0$ und nach der Kettenregel $\phi'(t) = k y_0 e^{kt} = k \phi(t)$.

[Ausführlicher notiert haben wir also das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

gelöst mit

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto k y$$

und $t_0 := 0$.]

Allgemeiner löst für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y_0 e^{k(t-t_0)}$$

das Anfangswertproblem $y'(t) = k y(t)$, $y(t_0) = y_0$.

Bemerkung 1.3 Für $k > 0$ und $y_0 > 0$ beschreibt vorige DGL z.B. das exponentielle Wachstum einer Bakterienpopulation ($y(t)$ = Zahl der Bakterien zur Zeit t). Für $k < 0$ und $y_0 > 0$ beschreibt die DGL z.B. den radioaktiven Zerfall eines Stoffes (mit $y(t)$ = Zahl der Atome des Stoffes/Isotops in der betrachteten Probe).

Auch Differentialgleichungen höherer Ordnung sind relevant, insbesondere Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz erfüllt die Position $x(t) \in \mathbb{R}^3$ eines punktförmigen Teilchens fester Masse $m > 0$ im Raum nämlich die Gleichung

$$m x''(t) = F,$$

die zeitliche Änderung des Impulses $m x'(t)$ ist also gleich der auf das Teilchen zur Zeit t wirkenden Kraft F . Häufig ist F eine Funktion von t , der Position $x(t)$ und der Geschwindigkeit $x'(t)$, es liegt also eine Differentialgleichung

$$x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

zweiter Ordnung vor im Sinne der folgenden Definition.³

³Wobei Physiker und Physikerinnen natürlich $\dot{x}(t)$ statt $x'(t)$ für die Geschwindigkeit zur Zeit t und $\ddot{x}(t)$ statt $x''(t)$ für die Beschleunigung schreiben würden.

1.4 Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Eine (explizite) Differentialgleichung m ter Ordnung im \mathbb{R}^n ist eine Gleichung der Form

$$y^{(m)}(t) = f(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \quad (3)$$

mit einer Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m$. Eine *Lösung* der DGL (3) ist eine C^m -Funktion $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem nicht-entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass⁴

$$(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(m-1)}(t)) \in U \quad \text{für alle } t \in I$$

und $\phi^{(m)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(m-1)}(t))$ für alle $t \in I$.

Ist $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \in U$ gegeben und gilt zusätzlich $t_0 \in I$ und

$$\phi(t_0) = y_0, \quad \phi'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad \phi^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1},$$

so wird ϕ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y^{(m)}(t) &= f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), \\ y(t_0) &= y_0 \\ \vdots &\vdots \\ y^{(m-1)}(t_0) &= y_{m-1} \end{cases} \quad (4)$$

genannt.

1.5 \sin und \cos sind Lösungen der DGL 2. Ordnung

$$y''(t) = -y(t),$$

denn es ist $\sin''(t) = -\sin(t)$ und $\cos''(t) = -\cos(t)$. Die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, löst also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) &= -y(t), \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$$

Da $\sin^{(4)} = \sin$, ist der Sinus außerdem eine Lösung der DGL vierter Ordnung

$$y^{(4)}(t) = y(t).$$

⁴Wir schreiben $\phi^{(j)}$ oder $\frac{d^j \phi}{dt^j}$ für die j te Ableitung einer Funktion ϕ von t .

Zu den Lernergebnissen der Studierenden der Mathematik 2 gehört laut Modulhandbuch:

“Sie können einfache gewöhnliche Differentialgleichungen bis einschließlich den Schwingungsgleichungen integrieren.”

Daher wurden Differentialgleichungen in Prof. Glöckners Mathematik 2 im SoSe 2022 bereits ein Stück weit behandelt. Einige der in der Mathematik 2 bereits behandelten Beispiellklassen und zugehörige Lösungsformeln werden nun wiederholt. Für die Begründung sei auf das Skript zur Mathematik 2 verwiesen, das in Panda (und auf Prof. Glöckners Homepage) verfügbar ist.

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 1.6 Eine *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist und $a: J \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ist $b(t) = 0$ für alle $t \in J$, die DGL also von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t),$$

so spricht man von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung; andernfalls heißt die lineare Differentialgleichung *inhomogen*. Ist a eine konstante Funktion, also einfach

$$y'(t) = a y(t) + b(t),$$

so spricht man von einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung *mit konstanten Koeffizienten*.

In der Mathematik 2 haben wir gezeigt (siehe 17.8):

1.7 (Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung). *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

- (a) (Globale Existenz von Lösungen). *Für jedes $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$t \mapsto y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \tag{5}$$

eine auf ganz J definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

- (b) (Eindeutigkeit von Lösungen). Ist $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und auch $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a), so gilt $\gamma = \phi|_I$.

Beispiel 1.8 Finden Sie die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung ϕ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= t^2 y(t) \\ y(1) &= 3. \end{cases}$$

Lösung: Nach 1.7 (a) ist

$$\phi(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

mit $t_0 = 1$, $y_0 = 3$ und $a(s) = s^2$, also

$$\phi(t) = 3 e^{\int_1^t s^2 ds} = 3 e^{\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}}.$$

Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In der Mathematik 2 wurde gezeigt (siehe 17.10):

1.9 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung). Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a: J \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt:

- (a) (Globale Existenz von Lösungen). Für jedes $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die auf ganz J definierte Funktion $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \quad (6)$$

- (b) (Eindeutigkeit von Lösungen). Ist $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und auch $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a), so gilt $\gamma = \phi|_I$.

Beispiel 1.10 Finden Sie die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = t^2 y(t) + t^2, \quad y(1) = 3.$$

Es liegt eine inhomogene lineare DGL erster Ordnung vor mit $a(t) = t^2$, $b(t) = t^2$, Anfangszeit $t_0 = 1$ und Anfangswert $y_0 = 3$. Laut 1.9 (a) ist die Lösung

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \\ &= \left(3 + \int_1^t \tau^2 e^{-\int_1^{\tau} s^2 ds} d\tau \right) e^{\int_1^t s^2 ds} \\ &= \left(3 + \int_1^t \tau^2 e^{\frac{1}{3} - \frac{\tau^3}{3}} d\tau \right) e^{\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= \left(4 - e^{\frac{1}{3} - \frac{t^3}{3}} \right) e^{\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= 4e^{\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}} - 1 \end{aligned}$$

denn es ist

$$\int_1^t \tau^2 e^{\frac{1}{3} - \frac{\tau^3}{3}} d\tau = - \int_0^{\frac{1}{3} - \frac{t^3}{3}} e^u du = [-e^u]_0^{\frac{1}{3} - \frac{t^3}{3}} = 1 - e^{\frac{1}{3} - \frac{t^3}{3}}$$

unter Benutzung der Substitution $u = \frac{1}{3} - \frac{\tau^3}{3}$, $du = -\tau^2 d\tau$.

Bemerkung 1.11 Wir erinnern daran, dass sich die Lösungsformel aus 1.9 (a) mit dem Ansatz der ‘‘Variation der Konstanten’’ gewinnen lässt.

Hierbei starten wir mit einer Lösung $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der zugehörigen homogenen linearen DGL

$$y'(t) = a(t) y(t). \tag{7}$$

Nach 1.7 (a) können wir $\eta(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ wählen und haben dann $\eta(t_0) = 1$. Jede andere Lösung der homogenen linearen DGL (7) ist von der Form

$$C \eta(t)$$

mit einer Konstanten C (nämlich $C = y_0$, dem Anfangswert zur Zeit t_0). Um die gesuchte Lösung ϕ der *inhomogenen* linearen DGL zu finden, ersetzen wir die Konstante C durch eine Funktion $c(t)$, machen also den Ansatz

$$\phi(t) = c(t)\eta(t).$$

Dann ist $c(t_0) = y_0$ und

$$\phi'(t) = c'(t)\eta(t) + c(t)\eta'(t) = c'(t)\eta(t) + c(t)a(t)\eta(t). \quad (8)$$

Wir setzen $\phi'(t)$ aus (8) und $\phi(t) = c(t)\eta(t)$ in (6) ein und erhalten die Bedingung

$$\underbrace{c'(t)\eta(t) + c(t)a(t)\eta(t)}_{=\phi'(t)} = a(t) \underbrace{c(t)\eta(t)}_{=\phi(t)} + b(t),$$

also

$$c'(t)\eta(t) = b(t),$$

also

$$c'(t) = b(t)\eta(t)^{-1} = b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Äquivalent hierzu ist

$$c(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau \quad \text{für alle } t \in J,$$

man erhält also die Formel aus 1.9 (a).

Beispiel 1.12 (Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Wir betrachten den Spezialfall einer linearen Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = ay(t) + b(t),$$

wobei $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ ist und $a \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl. Gegeben $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die auf J definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= ay(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

dann die Funktion $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-(\tau-t_0)a} d\tau \right) e^{(t-t_0)a}.$$

Dies können wir (wenn gewünscht) noch umformen zu

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)a}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)a}b(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen

1.13 Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $h: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass $h(y) > 0$ für alle $y \in K$ oder $h(y) < 0$ für alle $y \in K$. Gegeben $t_0 \in I$ und $y_0 \in K$ wollen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= g(t) h(y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

lösen.

1.14 Kochrezept. Man schreibe

$$\frac{dy}{dt} = g(t) h(y),$$

gehe formal zu

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t) dt$$

über und integriere beide Seiten:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(x)} dx = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Man berechne die Integrale und löse nach $y(t)$ auf.

Eine mathematische Begründung findet sich im Skript zur Mathematik 2 in 17.17. Unter der oben gemachten Voraussetzung, dass $h(y)$ stets positiv oder stets negativ ist, sind die Lösungen des Anfangswertproblems übrigens wieder eindeutig.

Beispiel 1.15 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \sin(t) y(t)^3 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Lösung. Wir schreiben

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) y^3$$

und stellen formal um zu

$$\frac{dy}{y^3} = \sin(t) dt.$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten die Bedingung

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{x^3} dx = \int_{t_0}^t \sin(s) ds,$$

also mit $t_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$\int_1^{y(t)} \frac{1}{x^3} dx = \int_0^t \sin(s) ds.$$

Ausrechnen der Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen liefert

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_1^{y(t)} = [-\cos(s)]_0^t,$$

also

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(y(t))^2} = 1 - \cos(t).$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cos(t) - 1}}.$$

Dies ist die gesuchte Lösung des vorgelegten Anfangswertproblems.

Lineare DGLn 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition 1.16 Eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist eine Differentialgleichung der Form

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Ist $b = 0$, so sprechen wir von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; andernfalls heißt die DGL *inhomogen*.

Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$y''(t) = -a_0 y(t) - a_1 y'(t) + b(t),$$

das heißt

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

mit

$$f: J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y, v) \mapsto -a_0 y - a_1 v + b(t).$$

Im Falle homogener linearer DGLn können wir stets $J = \mathbb{R}$ wählen. In der Mathematik 2 haben wir gesehen (siehe 19.4):

1.17 (Globale Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit) *Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Für alle $t_0 \in J$ und $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ gilt:*

- (a) *Es existiert eine auf ganz J definierte Lösung $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0. \end{cases}$$

- (b) *Ist I ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I \subseteq J$ und $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a), so ist $\psi = \phi|_I$.*

Auch haben wir in der Mathematik 2 gesehen (siehe 19.5):

1.18 (Lösungsmenge einer homogenen linearen DGL zweiter Ordnung). *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- (a) *Die Menge L_h aller auf J definierten Lösungen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{10}$$

ist ein 2-dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums \mathbb{R}^J aller reellwertigen Funktionen auf J .

- (b) *Es sei $t_0 \in J$. Zwei Lösungen $\phi_1, \phi_2 \in L_h$ der DGL bilden genau dann eine Basis für L_h , wenn die Vektoren*

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_1'(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(t_0) \\ \phi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^2 linear unabhängig (und somit eine Basis für \mathbb{R}^2) sind.

Bemerkung 1.19 Die in (b) angegebenen Vektoren bilden genau dann eine Basis von \mathbb{R}^2 , wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) \\ \phi_1'(t_0) & \phi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, also die Determinante

$$W(\phi_1, \phi_2)(t_0) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) \\ \phi_1'(t_0) & \phi_2'(t_0) \end{pmatrix} = \phi_1(t_0)\phi_2'(t_0) - \phi_1'(t_0)\phi_2(t_0)$$

von Null verschieden ist. Man nennt $W(\phi_1, \phi_2)(t_0)$ die *Wronski-Determinante* von ϕ_1 und ϕ_2 zur Zeit t_0 .

Definition 1.20 Bilden ϕ_1 und ϕ_2 eine Basis des Lösungsraums L_h , so nennt man ϕ_1, ϕ_2 ein *Lösungsfundamentalsystem* für die homogene lineare Differentialgleichung (10).

Wir erinnern an Beispiel 19.8 der Mathematik 2:

Beispiel 1.21 (Harmonischer Oszillator). Für $\omega_0 > 0$ betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

zweiter Ordnung, die sogenannte *Schwingungsgleichung*. Dann bilden die durch

$$\phi_1(t) := \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad \phi_2(t) := \cos(\omega_0 t)$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem.

Für homogene lineare DGLn zweiter Ordnung können Lösungsfundamentalsysteme stets angegeben werden (siehe 19.10 der Mathematik 2):

1.22 *Wir betrachten eine homogene lineare Differentialgleichung*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{11}$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir bilden das Polynom

$$p(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

mit $z \in \mathbb{C}$, das sogenannte charakteristische Polynom.

- (a) Hat p zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so bilden die durch

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (11).

- (b) Hat p eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, so bilden die durch

$$\phi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \phi_2(t) = t e^{\lambda t}$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (11).

- (c) Hat p ein Paar nicht reeller, komplex konjugierter komplexer Nullstellen $\alpha \pm i\omega$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$, so bilden die durch

$$\phi_1(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t), \quad \phi_2(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (11).

Ganz wesentlich ist Beispiel 19.11 der Mathematik 2.

Beispiel 1.23 Seien $\nu, \omega_0 > 0$. In der Physik beschreibt die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + \nu y' + \omega_0^2 y = 0 \tag{12}$$

einen gedämpften Oszillator.⁵ Das charakteristische Polynom lautet

$$p(z) = z^2 + \nu z + \omega_0^2$$

und wir haben

$$0 = p(z) = z^2 + \nu z + \omega_0^2 = (z + \nu/2)^2 + \omega_0^2 - \nu^2/4$$

genau dann, wenn

$$(z + \nu/2)^2 = \nu^2/4 - \omega_0^2. \tag{13}$$

⁵Es handelt sich um sogenannte "lineare" Dämpfung, die proportional zu $y'(t)$ ist. Bei Gleitreibung oder Haftreibung eines Körpers auf einer Oberfläche ist dies *nicht* (!) der Fall.

1. Fall (Schwingfall): Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 < 0$, so können wir (13) schreiben als

$$(z + \nu/2)^2 = -(\omega_0^2 - \nu^2/4)$$

mit $\omega_0^2 + \nu^2/4 > 0$. Wir haben also ein Paar komplex konjugierter, nicht reeller Nullstellen,

$$z_1 = -\nu/2 + i\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}, \quad z_2 = -\nu/2 - i\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$$

der Vielfachheit 1. Nach 1.22 (c) bilden also die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \cos(\omega t)$$

mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$ ein Lösungsfundamentalsystem.

2. Fall (Kriechfall). Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 > 0$, so hat p die zwei reellen Nullstellen

$$\lambda_1 = -\nu/2 - \sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\nu/2 + \sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2}$$

der Vielfachheit 1. Offenbar ist $\lambda_1 < 0$ und es ist auch $\lambda_2 < 0$, weil $\sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2} < \sqrt{\nu^2/4} = \nu/2$. Nach 1.22 (a) bilden die Funktionen

$$t \mapsto e^{t\lambda_1} \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{t\lambda_2}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

3. Fall (aperiodischer Grenzfall). Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 = 0$, so hat p die doppelte Nullstelle

$$\lambda = -\nu/2.$$

Nach 1.22 (b) bilden also die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \quad \text{und} \quad t \mapsto t e^{-\frac{\nu}{2}t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

Inhomogene lineare DGLn zweiter Ordnung

In der Mathematik 2 haben wir in 19.14 gesehen:

1.24 Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei L_h die Menge aller Lösungen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und L_i die Menge aller Lösungen der inhomogenen linearen DGL

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ist $\phi_p \in L_i$ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL, so ist

$$L_i = \phi_p + L_h = \{\phi_p + \phi : \phi \in L_h\}.$$

Bemerkung 1.25 Traditionell nennt man ϕ_p eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen linearen DGL und kann 1.24 dann wie folgt zusammenfassen:

“Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL erhält man, indem man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen DGL addiert.”

Prototypisch (und wichtig für die Allgemeinbildung) ist Beispiel 19.16 der Mathematik 2:

Beispiel 1.26 (Getriebener Oszillator). Lässt man auf einen harmonischen Oszillator zusätzlich eine äußere Kraft wirken, die eine harmonische Schwingung mit Winkelfrequenz Ω ist, erhält man eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = a \sin(\Omega t + b). \quad (14)$$

(a) Ist $\Omega \neq \omega_0$, so ist

$$\phi_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + b)$$

eine partikuläre Lösung.

- (b) (Resonanzkatastrophe). Ist $\Omega = \omega_0$, wird der Oszillator also mit seiner Resonanzfrequenz angeregt, so ist

$$\phi_p(t) = -\frac{a}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + b)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen DGL (14).

Beachten Sie, dass für $t = \frac{2\pi n - b}{\omega_0}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_p(t) = -\frac{a}{2\omega_0^2} (2\pi n - b)$$

ist, was für $n \rightarrow \infty$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert. Es gibt also beliebig große Auslenkungen und gleiches gilt für jede Lösung $\phi + \phi_p$ der inhomogenen DGL mit $\phi \in L_h$, da ϕ eine Linearkombination von $\sin(\omega_0 t)$ und $\cos(\omega_0 t)$ und somit eine beschränkte Funktion ist. Zwar wird die Modellierung bei beliebig großen Auslenkungen irgendwann unpräzise; dennoch muss man befürchten, dass ein schwingendes Werkstück dann zerstört werden könnte.

In der Mathematik 2 haben wir zudem einen getriebenen, gedämpften Oszillator diskutiert (siehe Beispiel 19.17).

Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Über Definition 1.6 hinaus haben wir in der Mathematik 2 auch lineare Differentialgleichungen für vektorwertige Funktionen betrachtet.

Definition 1.27 Eine *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{15}$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist, $A: J \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ eine stetige matrixwertige Funktion und $b: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion.⁶ Ist $b(t) = 0$ für alle $t \in J$, die DGL also von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

⁶Es ist also $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ mit stetigen Funktionen $a_{ij}: J \rightarrow \mathbb{R}$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ mit stetigen Funktionen $b_1, \dots, b_n: J \rightarrow \mathbb{R}$.

so spricht man von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung; andernfalls heißt die lineare Differentialgleichung *inhomogen*. Ist $A(t)$ eine konstante Funktion in t , also eine feste Matrix A , so nennt man (15) eine lineare Differentialgleichung *mit konstanten Koeffizienten*.

Betrachtet wird also die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

in \mathbb{R}^n mit $f: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto A(t)y + b(t)$.

Ist $n > 1$, werden solche Differentialgleichungen traditionell auch *Differentialgleichungssysteme* genannt. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf den Fall von linearen Differentialgleichungssystemen *mit konstanten Koeffizienten*. Ein entscheidendes Hilfsmittel für uns ist die *Matrixexponentialfunktion*. In der Mathematik 2 wurde in 18.2 gezeigt:

1.28 (Matrixexponentialfunktion). Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Wir definieren

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Konvergenz von Matrizen ist dabei wie folgt zu verstehen.

1.29 Identifizieren wir eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem Spaltenvektor

$$(a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n^2},$$

können wir den Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ aller $n \times n$ -Matrizen mit \mathbb{R}^{n^2} identifizieren.

- Wir können daher von Konvergenz einer Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von $n \times n$ -Matrizen gegen eine $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ sprechen: Verlangt ist $|A_k - A| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, oder äquivalent Konvergenz des (i, j) -Eintrags $(A_k)_{ij}$ von A_k gegen a_{ij} für $k \rightarrow \infty$, für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

- Ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von $n \times n$ -Matrizen, können wir die Anfangssummen $S_m := \sum_{k=0}^m A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten für $m \in \mathbb{N}_0$. Konvergiert die Folge $(S_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gegen eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, schreiben wir

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m A_k.$$

Schreiben wir $(A_k)_{ij}$ für den (i, j) -Eintrag von A_k , bedeutet dies also $a_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion kann man Lösungen homogener Anfangswertprobleme beschreiben (siehe 18.9 in Mathematik 2):

1.30 (Homogene lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt folgendes:

- (a) (Globale Existenz von Lösungen). Die Funktion

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0$$

ist eine auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= A y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

- (b) (Eindeutigkeit). Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in J$ und auch $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a), so gilt $\gamma = \phi|_J$.

Die Methode der ‘‘Variation der Konstanten’’ funktioniert in geeigneter Form auch für Systeme linearer Differentialgleichungen. Analog zu (9) erhält man (siehe 18.17 in Mathematik 2):

1.31 (Inhomogene lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Es seien A eine $n \times n$ -Matrix, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $b: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion und $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- (a) (Globale Existenz von Lösungen). Die auf ganz J definierte Funktion $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds \quad (16)$$

ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

- (b) (Eindeutigkeit). Ist $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und auch $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a), so ist $\gamma = \phi|_I$.

Die große Frage ist nun natürlich, wie man e^A bzw. $e^{(t-t_0)A}$ konkret berechnen kann; und zudem möchten wir Beispiele sehen sowohl für homogene Systeme als auch für inhomogene. Dem widmet sich das folgende Kapitel.

Wir halten vorher noch zwei nützliche Tatsachen fest.

1.32 Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei L_h die Menge aller auf ganz \mathbb{R} definierten Lösungen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y'(t) = Ay(t)$$

erster Ordnung. Dann gilt:

- (a) L_h ist ein n -dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- (b) Gegeben $t_0 \in \mathbb{R}$ bilden Lösungen $\phi_1, \dots, \phi_n \in L_h$ genau dann eine Basis für L_h (ein sogenanntes Lösungsfundamentalsystem), wenn die Vektoren $\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)$ eine Basis von \mathbb{R}^n bilden, also die sogenannte Wronski-Determinante

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(t_0) := \det(\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0))$$

mit den Spaltenvektoren $\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)$ von Null verschieden ist.

Begründung: Die Abbildung

$$\varepsilon_{t_0}: L_h \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi \mapsto \phi(t_0)$$

ist linear, da $(\phi + \psi)(t_0) = \phi(t_0) + \psi(t_0)$ per Definition der Summe zweier Funktionen $\phi, \psi \in L_h$ und ebenso $(r\phi)(t_0) = r\phi(t_0)$ für $r \in \mathbb{R}$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit von ϕ im Anfangswertproblem aus 1.30 ist ε_{t_0} surjektiv und injektiv, also bijektiv. Somit ist $\varepsilon_{t_0}: L_h \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, folglich $\dim(L_h) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Weiter bilden $\phi_1, \dots, \phi_n \in L_h$ genau dann eine Basis von L_h , wenn $\varepsilon_{t_0}(\phi_1), \dots, \varepsilon_{t_0}(\phi_n)$ eine Basis von \mathbb{R}^n bilden.

Beispiel 1.33 (Exponentialansatz) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar und ist v_1, \dots, v_n eine Basis des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren für A zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden die durch

$$\phi_j(t) := e^{\lambda_j t} v_j$$

definierten Funktionen $\phi_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ ein Lösungsfundamentalsystem für $y'(t) = Ay(t)$.

Es ist nämlich

$$\phi_j'(t) = e^{\lambda_j t} \lambda_j v_j = e^{\lambda_j t} A v_j = A e^{\lambda_j t} v_j = A \phi_j(t),$$

also jedes ϕ_j eine Lösung der DGL. Weiter bilden die Vektoren

$$\phi_j(0) = v_j$$

eine Basis von \mathbb{R}^n . Nach 1.32 (b) ist also ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Lösungsfundamentalsystem.

Seien $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ die Standard-Basisvektoren für \mathbb{R}^n .

Beispiel 1.34 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liefern die Spalten

$$\phi_j(t) = e^{tA} e_j$$

von e^{tA} ein Lösungsfundamentalsystem ϕ_1, \dots, ϕ_n für $y'(t) = Ay(t)$.

Nach 1.30 ist nämlich ϕ_j Lösung der DGL (zum Anfangswertproblem mit $y_0 = e_j$). Weiter bilden die Vektoren $\phi_j(0) = e_j$ eine Basis von \mathbb{R}^n für $j \in \{1, \dots, n\}$.

1.35 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $b: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei L_h die Menge der Lösungen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y'(t) = Ay(t)$$

und L_i die Menge aller Lösungen des inhomogenen DGL-Systems $y'(t) = Ay(t) + b(t)$. Ist $\phi_p \in L_i$ eine partikuläre Lösung, so gilt

$$L_i = \phi_p + L_h := \{\phi_p + \phi : \phi \in L_h\}.$$

Nachweis: Für $\phi \in L_h$ ist $(\phi_p + \phi)'(t) = \phi_p'(t) + \phi'(t) = A\phi_p(t) + b(t) + A\phi(t) = A(\phi_p(t) + \phi(t)) + b(t)$, also $\phi_p + \phi \in L_i$. Ist $\psi \in L_i$, so ist $(\psi - \phi_p)'(t) = A\psi(t) + b(t) - (A\phi_p(t) + b(t)) = A(\psi(t) - \phi_p(t))$, also $\psi - \phi_p \in L_h$ und $\psi = \phi_p + (\psi - \phi_p) \in \phi_p + L_h$.

2 Wie man e^A berechnet für eine Matrix A

Beginnend mit Spezialfällen machen wir uns klar, wie $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ im Prinzip für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet werden kann.

e^A für Diagonalmatrizen und nilpotente Matrizen

Beispiel 2.1 Für die 0-Matrix $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Es ist nämlich $\mathbf{0}^0 = \mathbf{1}_n$ per Definition und $\mathbf{0}^k = \mathbf{0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \mathbf{0}^k = \mathbf{1}_n + \mathbf{0} = \mathbf{1}_n$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$, mit Limes $\mathbf{1}_n$ für $m \rightarrow \infty$.

Beispiel 2.2 Für die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(2, 7) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ist

$$e^D = \text{diag}(e^2, e^7) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^7 \end{pmatrix}$$

und für $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tD} = \text{diag}(e^{2t}, e^{7t}) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 7t \end{pmatrix}^k &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (2t)^k & 0 \\ 0 & (7t)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (2t)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (7t)^k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $m \rightarrow \infty$. Analog sieht man, dass

$$e^{tD} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

gilt für $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.3 Für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

gilt

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Es ist nämlich $N^2 = \mathbf{0}$, also auch $N^k = \mathbf{0}$ für alle $k \geq 2$ und somit

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (tN)^k = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^1 \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $m \geq 1$. Die rechte Seite ist von $m \geq 1$ unabhängig und konvergiert gegen

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $m \rightarrow \infty$.

Beispiel 2.4 Man nennt ein Matrix $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *nilpotent*, wenn $N^\ell = \mathbf{0}$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$ (die vorige 2×2 -Matrix war also nilpotent mit $\ell = 2$). Dann sind die Komponenten von

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{t^k}{k!} N^k$$

einfach Polynome in t vom Grad $\leq \ell - 1$.

Betrachten wir zwei einfache homogene lineare Differentialgleichungssysteme, welche auf e^{tA} für Matrizen der bisher behandelten Formen führen.

Beispiel 2.5 Man finde die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= 0 \\ y_1(0) &= y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Lösung: Wir suchen die Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach 1.30 und Beispiel 2.3 ist die Lösung

$$y(t) = e^{tA} y_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das hätten wir natürlich auch von Hand geschafft: Wegen $y_2' = 0$ ist y_2 konstant mit Wert 1. Aus $y_1' = y_2 = 1$ folgt dann $y_1(t) = y_1(0) + t = 1 + t$.

Auch das folgende Beispiel ist noch nicht so spannend, da man direkt die DGLn für y_1 und y_2 lösen könnte.

Beispiel 2.6 Man finde die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t) \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 3. \end{aligned}$$

Lösung: Wir suchen die Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach 1.30 und Beispiel 2.2 ist die Lösung

$$y(t) = e^{tA} y_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

e^A für diagonalisierbare Matrizen

Wir erinnern an Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion, die in der Mathematik 2 (in 18.8 und 18.13) nachgewiesen wurden. Teile (d) und (e) werden uns die Berechnung von e^A für schwierigere Beispiele ermöglichen.

2.7 (Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

- (a) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}$.
- (b) Die $n \times n$ -Matrix e^A ist invertierbar, mit inverser Matrix $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- (c) Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \mapsto e^{tA}$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

- (d) (Vertauschende Matrizen). Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen derart, dass $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (e) Ist B eine $n \times n$ -Matrix und S eine invertierbare $n \times n$ -Matrix, so ist

$$e^{SBS^{-1}} = S e^B S^{-1}.$$

Also ist $e^{tSBS^{-1}} = S e^{tB} S^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.8 Finden Sie die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 5y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= -\frac{7}{2}y_1(t) + \frac{7}{2}y_2(t) \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

Lösung: Wir suchen die Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren zeigt, dass A diagonalisierbar ist; es ist

$$A = SDS^{-1}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

wobei

$$S^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nach 1.30, 2.7 und Beispiel 2.2 ist die Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA} y_0 = e^{S(tD)S^{-1}} y_0 = S e^{tD} S^{-1} y_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{7t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{7t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.9 Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, so ist $A = SDS^{-1}$ mit einer invertierbaren $n \times n$ -Matrix S und einer Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist nach 2.7 und Beispiel 2.2 dann also

$$e^{tA} = e^{StDS^{-1}} = S e^{tD} S^{-1},$$

wobei $e^{tD} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$.

e^A für Block-Diagonalmatrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Block-Diagonalmatrix* mit Blöcken der Größe $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + \dots + n_m = n$, wenn sie für $k \in \{1, \dots, m\}$ nacheinander quadratische Matrizen $A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ auf der Diagonalen besitzt und außerhalb nur Nullen. Wir schreiben dann auch

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m).$$

Beispiel 2.10 Eine Block-Diagonalmatrix mit Blöcken der Größe 1, 2 ist

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2)$$

mit

$$A_1 = (5), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.11 Da $(\text{diag}(A_1, \dots, A_m))^j = \text{diag}(A_1^j, \dots, A_m^j)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, ist

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_m)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m}) \quad (17)$$

und entsprechend $e^{t \text{diag}(A_1, \dots, A_m)} = \text{diag}(e^{tA_1}, \dots, e^{tA_m})$.

e^A allgemein mit Hilfe der Jordanschen Normalform

Was passiert, wenn A nicht diagonalisierbar ist? Kann auch dann e^{tA} im Prinzip immer berechnet werden?

Dies ist in der Tat möglich, mit Hilfe der sogenannten Jordanschen Normalform von A .

2.12 Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$) beliebig (also nicht notwendig diagonalisierbar), so gibt es immer noch eine komplexe invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ derart, dass

$$A = SJS^{-1}$$

mit einer gewissen Block-Diagonalmatrix $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$ (einer Matrix J in "Jordanscher Normalform"). Hierbei ist

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ & & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

eine $n_k \times n_k$ -Matrix mit einem komplexen Eigenwert λ_k von A auf der Diagonalen und Einsen auf der Parallelen zur Diagonalen (ein sogenanntes "Jordan-Kästchen"). Es ist also

$$J_k = \lambda_k \mathbf{1}_{n_k} + N_{n_k}$$

mit

$$N_{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N_{n_k} ist nilpotent mit $(N_{n_k})^{n_k} = \mathbf{0}$. Da die Matrizen $t\lambda_k \mathbf{1}_{n_k}$ und tN_{n_k} miteinander vertauschen, ist dann

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k \mathbf{1}_{n_k} + tN_{n_k}} = e^{t\lambda_k \mathbf{1}_{n_k}} e^{tN_{n_k}} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$e^{tA} = S \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m}) S^{-1}$$

mit $e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m}$ wie gerade berechnet.

Etwas mehr Details: Ist

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell},$$

so rutscht in den Potenzen N^j die Nebendiagonale mit Einsen in jedem Schritt eins weiter in die rechte obere Ecke; ist etwa $\ell = 4$, so ist

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \mathbf{0}$$

und somit

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für allgemeines $\ell \in \mathbb{N}$ ist analog

$$e^{tN} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{k!} t^k N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^{\ell-1}/(\ell-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{\ell-2}/(\ell-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Beispiele für Differentialgleichungssysteme

Wir diskutieren einige typische Beispiele von linearen Differentialgleichungssystemen erster und zweiter Ordnung.

Mischprozesse

Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung treten etwa bei Mischprozessen auf. Wir betrachten ein hypothetisches Beispiel.

Beispiel 3.1 In einer Mischanlage, die aus zwei Tanks besteht, werden in zwei Schritten Naturjoghurt, Zuckersirup und Erdbeerezubereitung zu einem Erdbeerejoghurt verrührt. Beide Tanks haben ein Fassungsvermögen von je $W = 100$ Litern und enthalten zur Zeit $t_0 = 0$ ausschließlich Naturjoghurt. In beiden Tanks wird ständig gerührt, und wir gehen von sofortiger vollständiger Vermischung aus. In den ersten Tank werden kontinuierlich $\alpha = 8$ Liter pro Sekunde Naturjoghurt gepumpt und $\beta = 1$ Liter Zuckersirup. Aus Tank 1 werden $\gamma := \alpha + \beta = 9$ Liter pro Sekunde der Mischung abgepumpt in Tank 2. Diesem wird außerdem $\beta = 1$ Liter pro Sekunde Erdbeerezubereitung zugeführt. Mit $\delta := \gamma + \beta = 10$ Litern pro Sekunde wird der fertige Fruchtjoghurt aus Tank 2 abgepumpt.

Es sei $V_1(t)$ das Volumen an Zuckersirup in Tank 1 zur Zeit t . Es sei $V_2(t)$ das Volumen an Zuckersirup in Tank 2 zur Zeit t und $V_3(t)$ das Volumen an Erdbeerezubereitung in Tank 2. Dann gilt

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= -\frac{V_1(t)}{V}\gamma + \beta, \\ V_2'(t) &= \frac{V_1(t)}{V}\gamma - \frac{V_2(t)}{V}\delta \quad \text{und} \\ V_3'(t) &= -\frac{V_3(t)}{V}\delta + \beta, \end{aligned}$$

also erfüllt $y(t) := (V_1(t), V_2(t), V_3(t))^T$ das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{V} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{V} & -\frac{\delta}{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta}{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{100} & 0 & 0 \\ \frac{9}{100} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

und der konstanten vektorwertigen Funktion

$$b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsbedingung ist

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da A eine untere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen; diese sind $-\frac{9}{100}$ und zweifach $-\frac{1}{10}$. Zugehörige Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \quad \text{und} \quad e_3.$$

Sei $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Basis mit den genannten Eigenvektoren als Spalten, also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$A = SDS^{-1}$$

mit $D = \text{diag}(-\frac{9}{100}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$. Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix},$$

ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-9t/100} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t/10} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-9t/100} & 0 & 0 \\ 9e^{-9t/100} - 9e^{-t/10} & e^{-t/10} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/10} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Nach (16) lautet die Lösung $\phi(t) = y(t) = (V_1(t), V_2(t), V_3(t))$ des vorgelegten Anfangswertproblems also

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds \\
 &= \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds \\
 &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-9(t-s)/100} & 0 & 0 \\ 9e^{-9(t-s)/100} - 9e^{-(t-s)/10} & e^{-(t-s)/10} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-s)/10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \\
 &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{9(s-t)/100} \\ 9e^{9(s-t)/100} - 9e^{(s-t)/10} \\ e^{(s-t)/10} \end{pmatrix} ds \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{100}{9}(1 - e^{-9t/100}) \\ 100(1 - e^{-9t/100}) - 90(1 - e^{-t/10}) \\ 10(1 - e^{-t/10}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{100}{9} \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix};$$

im fertig gemischten Joghurt befinden sich für große t also näherungsweise $V_2(t)/V \approx 10/100 = 0,1 = 10$ Volumenprozent Zuckersirup und $V_3(t)/V \approx 10/100 = 0,1 = 10$ Volumenprozent Erdbeerezubereitung.

Lineare Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Gekoppelte Oszillatoren

3.2 Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in \mathbb{R}^n der Form

$$y''(t) = B y(t) + C y'(t) \tag{19}$$

mit $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nennt man ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*.

In der vorigen Situation sei L_h die Menge aller auf ganz \mathbb{R} definierten Lösungen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems (19). Dann gilt:

3.3 L_h ist ein $2n$ -dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Gegeben $t_0 \in \mathbb{R}$ bilden Funktionen $\phi_1, \dots, \phi_{2n} \in L_h$ genau dann eine Basis für L_h (ein sogenanntes Lösungsfundamentalsystem), wenn die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} \phi_j(t_0) \\ \phi'_j(t_0) \end{pmatrix}$$

für $j \in \{1, \dots, 2n\}$ eine Basis für \mathbb{R}^{2n} bilden, also die sogenannte Wronski-Determinante

$$W(\phi_1, \dots, \phi_{2n})(t_0) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \dots & \phi_{2n}(t_0) \\ \phi'_1(t_0) & \dots & \phi'_{2n}(t_0) \end{pmatrix} \quad (20)$$

von Null verschieden ist.

Begründung. Der Beweis erfolgt durch *Umschreiben als System 1. Ordnung*. Es ist klar, dass L_h ein Vektorraum ist: Summen von Lösungen und Vielfache von Lösungen sind Lösungen. Gegeben $\phi \in L_h$ betrachten wir die durch

$$\Theta(\phi)(t) := \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix}$$

definierte Funktion $\Theta(\phi): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$; diese ist stetig differenzierbar. Dann ist $\Theta(\phi)$ eine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$z'(t) = A z(t)$$

erster Ordnung in \mathbb{R}^{2n} mit der Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ B & C \end{pmatrix},$$

denn es ist

$$\begin{pmatrix} \phi'(t) \\ \phi''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir L_1 für den $2n$ -dimensionalen Vektorraum aller auf \mathbb{R} definierten Lösungen von $z'(t) = A z(t)$, so erhalten wir also eine Abbildung

$$\Theta: L_h \rightarrow L_1, \quad \phi \mapsto \Theta(\phi)$$

und diese ist offenbar linear. Da wir ϕ aus $\Theta(\phi)$ zurückgewinnen können (es steht ϕ ja in den ersten n Komponenten), ist Θ injektiv. Ist schließlich

$(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n) \in L_1$, so ist $\psi_j = \phi_1'$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ und wir schließen, dass $\phi := (\phi_1, \dots, \phi_n)$ eine C^2 -Funktion und Lösung des Systems 2. Ordnung ist. Somit ist Θ auch surjektiv und somit ein Isomorphismus von Vektorräumen. Also ist $\dim(L_h) = \dim(L_1) = 2n$. Genau dann ist $\phi_1, \dots, \phi_{2n} \in L_h$ eine Basis für L_h , wenn $\Theta(\phi_1), \dots, \Theta(\phi_{2n})$ eine Basis für L_1 ist, also

$$W(\Theta(\phi_1), \dots, \Theta(\phi_{2n}))(t_0) \neq 0$$

mit der Wronski-Determinante für Systeme 1. Ordnung wie in 1.32 (b).

Beispiel 3.4 (Gekoppelte Oszillatoren). Zwei Körper gleicher Masse m sind auf einer Geraden/Koordinatenachse angeordnet und können auf dieser hin- und hergleiten. Zwischen ihnen ist eine Spiralfeder mit Federkonstante k gespannt und beide sind nach außen jeweils mit einer ebensolchen Feder abgespannt. Die Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage zur Zeit t in Richtung der Koordinatenachse sei $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ (Skizze siehe Vorlesung!) Wir erhalten ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung,

$$\begin{aligned} m x_1''(t) &= -k x_1(t) + k (x_2(t) - x_1(t)) \\ m x_2''(t) &= -k x_2(t) + k (x_1(t) - x_2(t)), \end{aligned}$$

das wir mit $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ noch umschreiben können als

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) &= \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t). \end{aligned}$$

Einsetzen zeigt, dass die gegenläufige Schwingung

$$\phi_1(t) = \sin(\Omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\Omega > 0$ genau dann eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist, wenn $\Omega = \sqrt{3}\omega_0$. Ebenso löst dann

$$\phi_2(t) = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das Differentialgleichungssystem. Zudem sind Schwingungen möglich, bei denen die Massen synchron hin- und herschwingen (mit jeweils gleicher Auslenkung in der gleichen Richtung). Einsetzen von

$$\phi_3(t) = \sin(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_4(t) = \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$ in die DGL zeigt, dass genau dann Lösungen vorliegen, wenn $\omega = \omega_0$ (was wir im Folgenden annehmen). Die Wronski-Determinante im Sinne von 3.3 lautet für $t_0 := 0$

$$\begin{aligned}
 W(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)(t_0) &= \det \begin{pmatrix} \sin(\Omega t_0) & \cos(\Omega t_0) & \sin(\omega t_0) & \cos(\omega t_0) \\ -\sin(\Omega t_0) & -\cos(\Omega t_0) & \sin(\omega t_0) & \cos(\omega t_0) \\ \Omega \cos(\Omega t_0) & -\Omega \sin(\Omega t_0) & \omega \cos(\omega t_0) & -\omega \sin(\omega t_0) \\ -\Omega \cos(\Omega t_0) & +\Omega \sin(\Omega t_0) & \omega \cos(\omega t_0) & -\omega \sin(\omega t_0) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \Omega & 0 & \omega & 0 \\ -\Omega & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \Omega & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \Omega \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} = \Omega \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} = -4\omega\Omega \neq 0.
 \end{aligned}$$

Also bilden $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung.

Kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage

Zur Motivation betrachten wir ein Fadenpendel.

Beispiel 3.5 An einem in einer Ebene schwingenden Faden ist eine punktförmige Masse m aufgehängt (Skizze siehe Vorlesung). Der Winkel zur Vertikalen sei α und die Länge des Fadens gleich ℓ . Dann gilt

$$m\ell\alpha''(t) = -mg \sin(\alpha(t)),$$

also

$$\alpha''(t) = \frac{g}{\ell} \cos'(\alpha(t)).$$

An der Stelle $\alpha_0 = 0$ liegt eine Ruhelage vor, es ist $\sin(0) = 0$. Bei kleinen Auslenkungen lassen wir das Restglied der Taylor-Approximation

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + R(\alpha)$$

des Cosinus um den Entwicklungspunkt 0 weg. Die Ableitung ist dann $-\alpha$ und wir erhalten näherungsweise die DGL

$$\alpha''(t) = -\frac{g}{\ell}\alpha(t)$$

des harmonischen Oszillators, deren Lösungen harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\sqrt{g/\ell}$ sind.

In höher-dimensionalen Situationen würden wir gern entsprechend vorgehen. Häufig lassen sich physikalische Systeme (etwa nach Reskalieren der Koordinatenachsen) auf die Form

$$x''(t) = -\nabla\phi(x(t))$$

bringen mit einer C^2 -Funktion $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und ihrem Gradienten $\nabla\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass der Ursprung eine Gleichgewichtslage ist, also $\nabla\phi(0) = 0$. Die Gleichgewichtslage soll stabil sein, also ein lokales Minimum von ϕ (ein "Potentialtopf"). Dann muss die Hessematrix

$$H_\phi(0) = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

positiv semidefinit sein, das heißt alle Eigenwerte der Hessematrix sind ≥ 0 . Wir nehmen an, dass die Hessematrix sogar positiv definit ist, also alle Eigenwerte > 0 . Lenken wir das System nur wenig und mit kleiner Geschwindigkeit aus der Ruhelage aus, wollen wir das Restglied $R(x)$ in der Taylorentwicklung

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T H_\phi(0)x + R(x)$$

2. Ordnung vernachlässigen und betrachten also die vereinfachte Potentialfunktion

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}x^T H_\phi(0)x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

Die Produktregel liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}$$

mit dem Kronecker-Delta. Somit ergibt sich die partielle Ableitung

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k \partial x_j}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_k}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k \partial x_j}(0) x_j.$$

Es ist also

$$\nabla\psi(x) = H_\phi(0)x.$$

Es sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren für $H_\phi(0)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Die Matrix S mit den Spalten v_1, \dots, v_n ist dann invertierbar und es ist

$$H_\phi(0) = SDS^{-1}$$

mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ist $x(t)$ eine Lösung des vereinfachten DGL-Systems

$$x''(t) = -\nabla\psi(x(t)) = -H_\phi(0)x(t) \quad (21)$$

(welches ein homogenes lineares DGL-System zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist), so hat

$$q(t) := S^{-1}x(t)$$

die erste Ableitung $q'(t) = S^{-1}x'(t)$ und zweite Ableitung $q''(t) = S^{-1}x''(t) = S^{-1}H_\phi(0)x(t) = S^{-1}SDS^{-1}x(t) = Dq(t)$, erfüllt also das homogene lineare DGL-System

$$q''(t) = Dq(t) \quad (22)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; und umgekehrt kommen wir von einer Lösung q des selbigen zu einer Lösung $x(t) := Sq(t)$ von (21). Mit $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ wird aus (22)

$$q_1''(t) = -\lambda_1 q_1(t), \dots, q_n''(t) = -\lambda_n q_n(t).$$

Wir haben also je eine homogene lineare DGL 2. Ordnung vorliegen für q_j mit $j \in \{1, \dots, n\}$. Anschaulich haben wir nun also n Stück harmonische Oszillatoren, die unabhängig voneinander schwingen – wir haben die Schwingungen “entkoppelt.” Es ist nun

$$\sin(\sqrt{\lambda_1} t)e_1, \cos(\sqrt{\lambda_1} t)e_1, \sin(\sqrt{\lambda_1} t)e_2, \cos(\sqrt{\lambda_1} t)e_2, \dots, \sin(\sqrt{\lambda_n} t)e_n, \cos(\sqrt{\lambda_n} t)e_n$$

ein Lösungsfundamentalsystem für (22). Multiplikation mit S zeigt, dass

$$\sin(\sqrt{\lambda_1} t)v_1, \cos(\sqrt{\lambda_1} t)v_1, \sin(\sqrt{\lambda_1} t)v_2, \cos(\sqrt{\lambda_1} t)v_2, \dots, \sin(\sqrt{\lambda_n} t)v_n, \cos(\sqrt{\lambda_n} t)v_n$$

ein Lösungsfundamentalsystem für (21) ist.

Mehr physikalischen Hintergrund und Verallgemeinerungen finden Sie ggf. im Klassiker Herbert Goldstein, “Klassische Mechanik”, Kapitel X.

Beispiel 3.6 In einem achsenparallelen Quadrat mit Mittelpunkt $(0, 0)$ in der Ebene befinde sich ein frei beweglicher punktförmiger Körper der Masse m . Dieser sei nach rechts und links mit je einer Spiralfeder der Federkonstanten k abgespannt und nach oben und unten mit je einer Spiralfeder der Federkonstanten $4k$. Die Position $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ des Körpers erfüllt dann eine Differentialgleichung der Form

$$m x''(t) = -\nabla\phi(x(t))$$

mit der Energie $\phi(x)$, die zum Auslenken der Federn aus der entspannten Lage in die Position x aufzubringen ist. Die Formel für $\phi(x)$ wäre länglich und nicht allzu erhellend. Taylorentwicklung 2. Ordnung führt auf das vereinfachte Potential

$$\psi(x_1, x_2) = kx_1^2 + 4kx_2^2$$

mit Gradient

$$\nabla\psi(x_1, x_2) = (2k x_1, 8k x_2)$$

und das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -\frac{2k}{m}x_1(t) \\ x_2''(t) &= -4\frac{2k}{m}x_2(t). \end{aligned}$$

Mit $\omega := \sqrt{\frac{2k}{m}}$ bilden die durch

$$\phi_1(t) = \sin(\omega t)e_1, \quad \phi_2(t) = \cos(\omega t)e_1, \quad \phi_3(t) = \sin(2\omega t)e_2, \quad \phi_4(t) = \cos(2\omega t)e_2$$

gegebenen Funktion ein Lösungsfundamentalsystem. Linearkombinationen ergeben interessante Bewegungsmuster. Zum Beispiel durchläuft

$$\phi_2(t) + \phi_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix}$$

eine Lissajous-Figur, die wie eine liegende 8 aussieht.

4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In 1.22 haben wir bereits Lösungsfundamentalsysteme angegeben für homogene lineare Differentialgleichungen

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zudem haben wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (auch für entsprechende inhomogene DGLn) diskutiert. Analoge Ergebnisse werden nun vorgestellt für Differentialgleichungen n ter Ordnung.

Definition 4.1 Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t)$$

mit reellen Zahlen a_0, \dots, a_{m-1} und einer stetigen Funktion $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ heißt *lineare Differentialgleichung m ter Ordnung* mit konstanten Koeffizienten. Ist b die Nullfunktion, so heißt die lineare Differentialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

4.2 Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, a_0, \dots, a_{m-1} reelle Zahlen und $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter sei L_h die Menge aller auf J definierten Lösungen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0. \quad (23)$$

Dann gilt:

- (a) L_h ist ein m -dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Für alle $y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in J$ hat das Anfangswertproblem

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t),$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}$$

genau eine auf ganz J definierte Lösung.

Beweis. Es sei $L = L_h$ (falls $b = 0$) oder $L = L_i$ die Menge aller auf J definierten Lösungen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t) \quad (24)$$

und \tilde{L} die Menge der auf J definierten Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t) \\ &\vdots \\ u_{m-1}'(t) &= u_m(t) \\ u_m'(t) &= -a_{m-1}u_m(t) - \cdots - a_0u_1(t) + b(t) \end{aligned}$$

erster Ordnung in \mathbb{R}^n , also des Systems

$$u'(t) = Au(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

mit der $m \times m$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-3} & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Für jedes $\phi \in L$ ist die Funktion

$$\Theta(\phi) := (\phi, \phi', \dots, \phi^{(m-1)}): J \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Lösung von (25). Umgekehrt ist für jede Lösung $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m): J \rightarrow \mathbb{R}^m$ von (25) die Funktion ϕ_1 eine Lösung von (24). Also ist

$$\Theta: L \rightarrow \tilde{L}$$

eine bijektive Abbildung mit $\Theta^{-1}(\psi_1, \dots, \psi_m) = \psi_1$.

Die in (b) behauptete Existenz und Eindeutigkeit folgt aus derjenigen für das Differentialgleichungssystem (25), die in 1.30 und 1.31 festgehalten wurde.

Ist $b = 0$, so sind Summen und Vielfache von Lösungen der homogenen linearen DGL wieder Lösungen, es ist also $L = L_h$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wissen, dass \tilde{L} ein m -dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist (siehe 1.30). Die bijektive Abbildung Θ ist linear, also ein Isomorphismus von Vektorräumen. Folglich ist $\dim L_h = \dim \tilde{L} = m$.

4.3 Lösungen $\phi_1, \dots, \phi_m \in L_h$ werden ein *Lösungsfundamentalsystem* der homogenen linearen Differentialgleichung (23) m ter Ordnung genannt, wenn ϕ_1, \dots, ϕ_m eine Basis von L_h ist.

Lösungsfundamentalsysteme können wie folgt berechnet werden. Wir verzichten auf den Beweis (der in Burg-Haf-Wille zu finden ist), da der wichtigste Spezialfall $m = 2$ in der Mathematik 2 bereits bewiesen wurde.

4.4 Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$. Weiter seien

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

und

$$\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_\ell + i\beta_\ell,$$

$$\alpha_1 - i\beta_1, \dots, \alpha_\ell - i\beta_\ell$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ und $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(z) := z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z + a_0. \quad (27)$$

Es sei n_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j von p für $j \in \{1, \dots, k\}$ und m_j die Vielfachheit der Nullstellen $\alpha_j + i\beta_j$ sowie $\alpha_j - i\beta_j$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Dann bilden die folgenden reellwertigen Funktionen von $t \in \mathbb{R}$ zusammen ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (28)$$

mit konstanten Koeffizienten:

- $t^a e^{\lambda_j t}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $a \in \{0, 1, \dots, n_j - 1\}$;

- $t^a e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$ und $a \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$;
- $t^a e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t)$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$ und $a \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$.

Das Polynom p aus (27) wird das *charakteristische Polynom* der homogenen linearen Differentialgleichung (28) mit konstanten Koeffizienten genannt.

Beispiel 4.5 Die homogene lineare DGL

$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 0$$

vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom

$$p(z) = z^4 - 16$$

mit den einfachen reellen Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und dem Paar $2i$, $-2i$ komplex konjugierter nicht-reeller komplexer Nullstellen der Vielfachheit 1. Es ist $\pm 2i = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Nach 4.4 bilden die durch

$$\phi_1(t) = e^{2t}, \quad \phi_2(t) = e^{-2t}, \quad \psi_3(t) = \sin(2t) \quad \text{und} \quad \phi_4(t) = \cos(2t)$$

gegebenen Funktionen ein Lösungsfundamentalsystem.

5 Laplace-Transformation und lineare Differentialgleichungen

Wir lernen eine weitere Methode kennen zur Lösung linearer Differentialgleichungen. Dies ist eine Integraltransformation, die sogenannte Laplacetransformation. Sie ordnet einer Funktion $f(t)$ eine neue Funktion $F(s)$ zu.

5.1 Wir betrachten eine Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (oder $[0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$). Annahme: f sei *stückweise stetig*, das heißt für alle $R > 0$ gebe es eine Zerlegung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = R$$

des Intervalls $[0, R]$ derart, dass für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Einschränkung $f|_{]t_{j-1}, t_j[}$ eine stetige Fortsetzung auf das abgeschlossene Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ besitzt, d.h. es existiert eine stetige Funktion $g_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}) mit

$$f|_{]t_{j-1}, t_j[} = g_j|_{]t_{j-1}, t_j[}.$$

Äquivalent dazu ist, zu verlangen, dass die linksseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t \nearrow t_j} f(t)$$

für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ existieren und die rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow t_j} f(t)$$

für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Auf $[0, R]$ ist f also stetig bis auf endlich viele Ausnahmestellen und dies sind höchstens Sprungstellen.

Beispiel 5.2 Stetige Funktionen auf $[0, \infty[$ sind insbesondere stückweise stetig. Eine Rechteckschwingung $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ wie

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } k\pi < t < (k+1)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0; \\ -1 & \text{wenn } (k+1)\pi < t < (k+2)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0; \\ 0 & \text{wenn } t = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ist stückweise stetig.

5.3 Eine Funktion f wie in 5.1 heißt *Laplace-transformierbar*, wenn ein $s_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-s_0 t} dt < \infty.$$

Für alle $s \geq s_0$ ist $e^{-st} \leq e^{-s_0 t}$ für alle $t \in [0, \infty[$, nach dem Majorantenkriterium also auch

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st} dt < \infty.$$

Die Menge $D(f)$ aller $s \in \mathbb{R}$ mit $\int_0^\infty |f(t)|e^{-st} dt < \infty$ ist dann also ein nach rechts unbeschränktes Intervall, folglich von der Form

$$\mathbb{R}, \quad [a, \infty[\quad \text{oder} \quad]a, \infty[$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Nach dem Majorantenkriterium existiert das uneigentliche Integral

$$F(s) := \mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

für alle $s \in D(f)$. Die so definierte (auch $\mathcal{L}(f)$ geschriebene) Funktion

$$F: D(f) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \mathbb{C})$$

wird die *Laplace-Transformierte* von f genannt.

Die Abbildung \mathcal{L} , die einer Laplace-transformierbaren Funktion f ihre Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(f)$ zuordnet, wird *Laplace-Transformation* genannt.

Beispiel 5.4 Die konstante 1-Funktion $1: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1$ ist stetig, also stückweise stetig. Für $s \in]0, \infty[$ und $R > 0$ gilt

$$\int_0^R |1|e^{-st} dt = \int_0^R e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_{t=0}^{t=R} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sR} \rightarrow \frac{1}{s}$$

für $R \rightarrow \infty$, die 1-Funktion ist also Laplace-transformierbar mit

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{für alle } s > 0$$

(wir können $s_0 > 0$ beliebig wählen). Nach dem Vorigen ist $]0, \infty[\subseteq D(1)$. In der Tat ist $D(1) =]0, \infty[$, da für $s_0 := 0$

$$\int_0^\infty |1|e^{-s_0 t} dt = \int_0^\infty 1 dt = \infty.$$

Analog ist $\mathcal{L}(C)(s) = \frac{C}{s}$ für $0 \neq C \in \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $]0, \infty[$ and $\mathcal{L}(0) = 0$ mit Definitionsbereich \mathbb{R} .

Bemerkung 5.5 Ist $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar, so kann man übrigens auch die Funktion

$$D(f) + i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_0^\infty f(t)e^{-tz} dt$$

mit komplexem Argument betrachten (die Fourier-Laplace-Transformierte von f), welche stetig und auf dem Inneren des Definitionsbereichs (komplex) differenzierbar ist. Dies ist nützlich für die tiefere Theorie, wir verzichten hier aber darauf.

Betrachten wir weitere Beispiele. Für $c \in \mathbb{C}$ ist

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = ce^{ct};$$

ist $c \neq 0$, können wir durch c teilen und sehen, dass $\frac{e^{ct}}{c}$ eine Stammfunktion für e^{ct} ist. Dies wird in den folgenden Beispielen benutzt.

Beispiel 5.6 Wir wollen die Laplace-Transformierte von e^{at} berechnen für $a \in \mathbb{R}$. Für $s \in \mathbb{R}$ ist für $R > 0$

$$\int_0^R e^{at}e^{-st} dt = \int_0^R e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_{t=0}^{t=R} = \frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{1}{a-s},$$

wenn $s \neq a$. Für $s = a$ hat das zweite Integral einen konstanten Integranden $\neq 0$, divergiert also für $R \rightarrow \infty$. Für $s < a$ divergiert die rechte Seite bestimmt gegen ∞ . Für $s > a$ konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{1}{s-a}$. Also

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Beispiel 5.7 Für $a \in \mathbb{R}$ finde die Laplace-Transformierte von $\sin(at)$.

Im Falle $a = 0$ ist dies die Nullfunktion, also auch die Laplace-Transformierte gleich 0. Sei nun $a \neq 0$. Für alle $s > 0$ ist für alle $t \geq 0$

$$|\sin(at)e^{-st}| \leq e^{-st}$$

mit $\int_0^\infty e^{-st} dt < \infty$. Nach dem Majorantenkriterium existiert also das uneigentliche Integral $\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st} dt$ und es ist $]0, \infty[\subseteq D(\sin(at))$. Für $s = 0$ gilt

$$\int_0^\infty |\sin(at)|e^{-st} dt = \int_0^\infty |\sin(at)| dt \geq \int_0^{n2\pi/a} |\sin(at)| dt = n \int_0^{2\pi/a} |\sin(at)| dt \rightarrow \infty.$$

Also ist $D(\sin(at)) =]0, \infty[$. Für $s > 0$ und $R > 0$ gilt nun

$$\begin{aligned} \int_0^R \underbrace{\sin(at)e^{-st}}_{=\operatorname{Im}(e^{iat}e^{-st})} dt &= \operatorname{Im} \left(\int_0^R e^{iat} e^{-st} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\int_0^R e^{(ia-s)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(ia-s)t}}{ia-s} \right]_{t=0}^{t=R} = \operatorname{Im} \left(\underbrace{\frac{e^{(ia-s)R}}{ia-s}}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{ia-s} \right) \\ &\rightarrow \operatorname{Im} \frac{1}{s-ia} = \operatorname{Im} \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

für $R \rightarrow \infty$. Hierbei haben wir benutzt, dass

$$e^{(ia-s)R} = e^{iaR} e^{-sR} \quad \text{mit} \quad e^{-sR} \rightarrow 0.$$

Weiter haben wir am Ende den Bruch mit dem komplex Konjugierten $s+ia$ erweitert. Nach dem Vorigen ist

$$\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

(Mit $s \in \mathbb{R}$ gilt die Formel auch, wenn $a = 0$).

Beispiel 5.8 Analog folgern wir mit $\cos(at) = \operatorname{Re}(e^{iat})$, dass

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

Die Laplace-Transformierte einer Funktion f bleibt unverändert, wenn wir f an einzelnen Stellen abändern. Davon abgesehen legt die Laplace-Transformierte die Funktion fest und es genügt sogar, $\mathcal{L}(f)(s)$ nur für große s zu kennen:

5.9 (Eindeutigkeitsatz). Seien $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ und $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace transformierbar. Gibt es ein $s_0 \in D(f) \cap D(g)$ mit

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s) \quad \text{für alle } s \geq s_0,$$

so ist $f(t) = g(t)$ für jede Stelle $t \in [0, \infty[$, an der f und g stetig sind. Sind f und g stetig, so folgt also $f = g$.

Für den Beweis der Eindeutigkeitsaussagen sei auf die zitierte Lehrbuchliteratur verwiesen.

5.10 (Notationen). Ist f bzw. $f(t)$ eine Laplace-transformierbare Funktion auf $[0, \infty[$, so schreiben wir $\mathcal{L}(f)$, F oder $F(s)$ für ihre Laplace-Transformierte. Man schreibt auch

$$f(t) \circ \text{---} \bullet F(s),$$

wenn man sagen möchte, dass f und F über die Laplace-Transformation zueinander korrespondieren.

Eine Strategie zum Lösen von Differentialgleichungen benutzt folgende Beobachtung:

Bemerkung 5.11

(a) Damit zwei stetige Funktionen $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ und $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ gleich sind, brauchen Sie also nur $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ zu zeigen.

(b) Um zu sehen, dass eine Funktion $y(t)$ auf $[0, \infty[$ eine DGL

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$$

erfüllt, brauchen wir also nur

$$\mathcal{L}(y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t))(s) = \mathcal{L}(b(t))(s)$$

zu zeigen (und dies nur für große s).

Um weiter zu kommen, benötigen Rechenregeln für Laplace-Transformierte.

5.12 (Linearität der Laplace-Transformation) Sind $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ und die Funktion $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ Laplace-transformierbar. Für alle $s \in D(f) \cap D(g)$ ist s im Definitionsbereich der Laplace-Transformierten von $\alpha f + \beta g$ und es ist

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s).$$

Nachweis. Sei $s \in D(f) \cap D(g)$. Für alle $R > 0$ ist wegen $|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leq |\alpha| |f(t)| + |\beta| |g(t)|$

$$\begin{aligned} \int_0^R |\alpha f(t) + \beta g(t)| e^{-st} dt &\leq |\alpha| \int_0^R |f(t)| e^{-st} dt + |\beta| \int_0^R |g(t)| e^{-st} dt \\ &\leq |\alpha| \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt + |\beta| \int_0^\infty |g(t)| e^{-st} dt =: C \end{aligned}$$

und somit mit $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty |\alpha f(t) + \beta g(t)| e^{-st} dt \leq C < \infty.$$

Also ist $s \in D(\alpha f + \beta g)$. Weiter gilt

$$\int_0^R (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \alpha \int_0^R f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^R g(t) e^{-st} dt \rightarrow \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s)$$

für $R \rightarrow \infty$.

5.13 (Ableitungssatz). Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar und stetig differenzierbar mit Laplace-transformierbarer Ableitung f' . Dann ist

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

für alle $s \in D(f) \cap D(f')$.

Nachweis: Sei $s \in D(f) \cap D(f')$. Für $R > 0$ liefert partielle Integration mit $\frac{d}{dt} e^{-st} = -s e^{-st}$

$$\int_0^R f'(t) e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_{t=0}^{t=R} - \int_0^R f(t) (-s) e^{-st} dt = f(R) e^{-sR} - f(0) + s \int_0^R f(t) e^{-st} dt.$$

Für $R \rightarrow \infty$ konvergiert das Integral links gegen $\mathcal{L}(f')(s)$, das ganz rechts gegen $\mathcal{L}(f)(s)$. Auflösen nach $f(R) e^{-sR}$ zeigt, dass der Ausdruck konvergiert. Setzen wir

$$C(s) := \lim_{R \rightarrow \infty} f(R) e^{-sR},$$

so ist also

$$\mathcal{L}(f')(s) = C(s) + s\mathcal{L}(f)(s) - f(0). \quad (29)$$

Ist $s > s_0$ mit $s_0 \in D(f) \cap D(f')$, so gilt

$$f(R) e^{-sR} = \underbrace{f(R) e^{-s_0 R}}_{\rightarrow C(s_0)} \underbrace{e^{-(s-s_0)R}}_{\rightarrow 0} \rightarrow C(s_0) 0 = 0$$

für $R \rightarrow \infty$ und somit $C(s) = 0$. Aus (29) wird also wie gewünscht $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

(Sollte $D(f) \cap D(f') = [a, \infty[$ ein Minimum a haben, gilt die Formel aus Stetigkeitsgründen auch für $s = a$).

Bemerkung 5.14 Der Ableitungssatz gilt auch, wenn f Laplace-transformierbar ist, auf jedem Intervall $[0, R]$ stückweise stetig differenzierbar ist⁷ und f' Laplace-transformierbar ist.⁸

Per vollständiger Induktion zeigt man:

5.15 (Differentiationssatz für höhere Ableitungen). *Es sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass $f, f', \dots, f^{(n)}$ Laplace-transformierbar sind. Dann gilt für alle $s \in D(f) \cap D(f') \cap \dots \cap D(f^{(n)})$*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

Beispiel 5.16 Zweimalige Benutzung des Ableitungssatzes zeigt, dass

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

5.17 Beweis für 5.15. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist der Ableitungssatz. Sei nun $n > 1$. Da

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

ist nach dem Ableitungssatz und Induktionsvoraussetzung (dem Fall $n - 1$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s\mathcal{L}(f^{(n-1)})(s) - f^{(n)}(0) \\ &= s \left(s^{n-1}\mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k} f^{(k)}(0) \right) - f^{(n)}(0) \\ &= s^n \mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-1-k} f^{(k)}(0) - f^{(n)}(0), \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Eine leicht zu erkennende Klasse von Funktionen ist immer Laplace-transformierbar.

⁷Also f stetig ist und eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = R$ der Intervalls existiert, so dass $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Die rechts- und linksseitigen Ableitungen von f an der Stelle t_j brauchen jedoch nicht gleich zu sein für $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

⁸Falls $f'(t)$ nicht existiert an einer der Stellen t_j , weise man $f'(t)$ dort einen beliebigen Wert zu. Dann ist f' stückweise stetig.

5.18 Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig. Wir nennen f eine Funktion *von exponentiellem Typ* (oder auch: von nur exponentiellem Wachstum), wenn eine Konstante $C > 0$ und ein $a \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$|f(t)| \leq Ce^{at} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann ist f Laplace-transformierbar, denn für jedes $s_0 > a$ ist

$$|f(t)|e^{-s_0 t} \leq Ce^{at}e^{-s_0 t} = Ce^{(a-s_0)t},$$

also $e^{(a-s_0)t}$ eine integrierbare Majorante für $\int_0^\infty |f(t)|e^{-st} dt$.

5.19 Alle Funktionen auf $[0, \infty[$ der Form $e^{\lambda t}$, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ sowie Polynome $p(t)$ sind von exponentiellem Typ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$). Produkte und Linearkombinationen von Funktionen von exponentiellem Typ sind wiederum von exponentiellem Typ.

Bemerkung 5.20 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die Matrixeinträge von e^{tA} Funktion von exponentiellem Typ in der Variablen t , denn die Berechnung der Matrixexponentialfunktion über die Jordansche Normalform (wie in Kapitel 2) zeigt, dass diese aus Exponentialfunktionen und Polynomen wie in (5.19) aufgebaut sind. Dies gilt dann auch für die Komponenten $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ der Lösung

$$\phi(t) = e^{tA}y_0$$

des Anfangswertproblems

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $b: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion mit Komponenten $b_1(t), \dots, b_n(t)$ von exponentiellem Typ, so sind auch die Komponenten der Lösung

$$\phi(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds \tag{30}$$

des Anfangswertproblems

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

(wie in (16) in 1.31) von exponentiellem Typ. Der Nachweis (den Sie gern überspringen können) erfordert etwas Rechnung. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$m_{ij}(t)$ der (i, j) -Eintrag der Matrix e^{tA} , für $t \in [0, \infty[$. Es gibt $C > 0$ und $a \geq 0$ derart, dass $|b_j(t)| \leq Ce^{at}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und $|m_{ij}(t)| \leq Ce^{at}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Für alle $t \geq 0$ und $s \in [0, t]$ gilt dann

$$|b_j(s)| \leq Ce^{as} \leq Ce^{at}$$

und somit

$$|b(s)| = \sqrt{b_1(s)^2 + \dots + b_n(s)^2} \leq \sqrt{n} Ce^{at}.$$

Weiter gilt

$$\|e^{(t-s)A}\|_{\text{op}} \leq n^2 \max\{|m_{ij}(t-s)| : 1 \leq i, j \leq n\} \leq n^2 Ce^{a(t-s)} \leq n^2 Ce^{at},$$

wobei die erste Ungleichung aus der letzten Abschätzung in 16.7 in Prof. Glöckners Vorlesungsskript zur Mathematik 2 folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds \right| &\leq \int_0^t |e^{(t-s)A} b(s)| ds \leq \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|_{\text{op}} |b(s)| ds \\ &\leq \int_0^t n^2 Ce^{at} \sqrt{n} Ce^{at} ds \leq t n^{5/2} C^2 e^{2at}. \end{aligned}$$

Die Komponenten von $\int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds$ sind also $\leq t n^{5/2} C^2 e^{2at}$ und somit von exponentiellem Typ. Folglich sind auch die Komponenten ϕ_1, \dots, ϕ_n der durch (30) gegebenen vektorwertigen Funktion ϕ von exponentiellem Typ.

Durch Umschreiben als System 1. Ordnung wie im Beweis von 4.2 folgt:⁹

5.21 Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ist $b: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von exponentiellem Typ, so ist die Lösung $\phi: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t),$$

$$y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

von exponentiellem Typ und auch die Ableitungen $\phi', \dots, \phi^{(n)}$.

Eine exemplarische Anwendung auf ein Anfangswertproblem ist wie folgt.

⁹Man bekommt die Schlussfolgerung für $\phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)}$. Für $\phi^{(n)}$ bekommt man sie durch anschließendes Auflösen der DGL nach $y^{(n)}$.

Beispiel 5.22 Sei $\omega \neq 0$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

für $t \geq 0$ mittels Laplace-Transformation.

Wir wissen aus 5.21, dass die Lösung y sowie y' und y'' von exponentiellem Typ und somit Laplace-transformierbar sind. Sei $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$. Gefordert ist nun

$$\mathcal{L}(y'' + \omega^2 y) = \mathcal{L}(1),$$

was sich wegen der Linearität der Laplace-Transformation umschreiben lässt zu

$$\mathcal{L}(y'') + \omega^2 \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1). \quad (31)$$

Nach dem Differentiationssatz für höhere Ableitungen ist

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s),$$

wobei wir gleich die Anfangsbedingungen eingesetzt haben. Weiter ist nach Beispiel 5.4

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}.$$

Einsetzen in (31) führt auf die äquivalente Bedingung

$$s^2 Y(s) + \omega^2 Y(s) = \frac{1}{s},$$

also

$$(s^2 + \omega^2) Y(s) = \frac{1}{s}$$

beziehungsweise

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}. \quad (32)$$

Für die rechte Seite führen wir nun eine Partialbruchzerlegung durch. Multiplizieren wir den Ansatz

$$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B + Cs}{s^2 + \omega^2}$$

mit dem linken Nenner, bekommen wir die Bedingung

$$1 = A(s^2 + \omega^2) + (B + Cs)s = (A + C)s^2 + Bs + A\omega^2,$$

so dass also $B = 0$ sein muss, $A = \frac{1}{\omega^2}$ und $C = -A = -\frac{1}{\omega^2}$. Aus (32) wird nun

$$\mathcal{L}(y)(s) = Y(s) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t)\right)(s),$$

unter Benutzung der Beispiele 5.4 und 5.8. Mit dem Eindeutigkeitsatz folgt nun

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t).$$

Zur Übung schauen wir uns zudem an, wie sich ein wohlbekanntes Beispiel (die Differentialgleichung für radioaktiven Zerfall bzw. exponentielles Wachstum) mit der neuen Methode lösen lässt.

Beispiel 5.23 *Lösen Sie für $k \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem*

$$y'(t) = k y(t), \quad y(0) = y_0$$

für $t \geq 0$ unter Benutzung der Laplace-Transformation.

Lösung. Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der Differentialgleichung liefert die Bedingung

$$\mathcal{L}(y')(s) = \mathcal{L}(k y)(s). \tag{33}$$

Nach dem Ableitungssatz ist die linke Seite

$$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = sY(s) - y_0,$$

wobei wir $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ abgekürzt und die Anfangsbedingung eingesetzt haben. Wegen der Linearität der Laplace-Transformation ist die rechte Seite

$$\mathcal{L}(k y)(s) = k \mathcal{L}(y)(s) = k Y(s).$$

Aus (33) wird also

$$sY(s) - y_0 = k Y(s),$$

was sich umschreiben lässt als

$$(s - k) Y(s) = y_0.$$

Für $s > k$ können wir durch $s - k$ teilen und erhalten

$$Y(s) = y_0 \frac{1}{s - k},$$

also

$$\mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(y_0 e^{kt})(s)$$

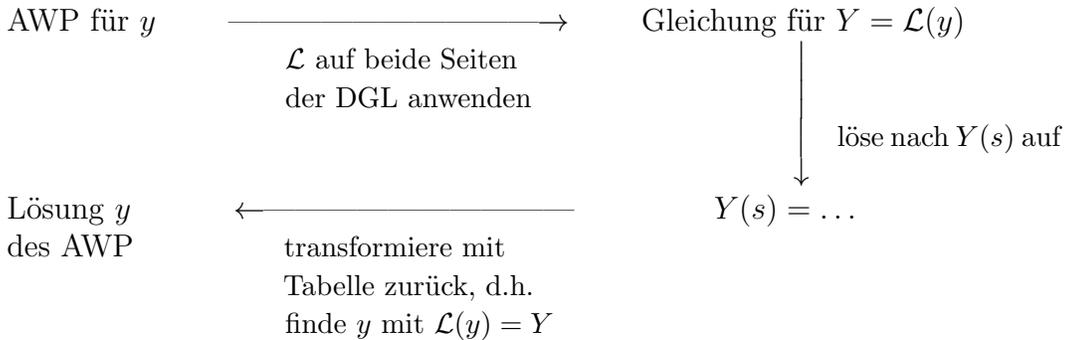
unter Benutzung von Beispiel 5.6. Der Eindeigkeitsatz liefert nun

$$y(t) = y_0 e^{kt} \quad \text{für } t \geq 0.$$

5.24 Wollen wir für $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ sowie eine stetige Funktion $b: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ von exponentiellem Typ die Lösung $y: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) &= b(t), \\ y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

finden, können wir nach dem Vorigen wie folgt vorgehen:



Eine geeignete Tabelle von Laplace-Transformierten finden Sie in Burg-Haf-Wille, Band 3.

Lassen Sie uns einige Beobachtungen anstellen zur neuen Lösungsmethode.

Bemerkung 5.25 Nach 5.21 sind die Lösung y des Anfangswertproblems sowie die Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(n)}$ Laplace-transformierbar.

Bemerkung 5.26 Die Methode liefert Lösungen $y(t)$ nur für $t \geq 0$; wir erfahren nicht, wie die Lösung für $t < 0$ aussieht (falls $b(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ gegeben ist). Manchmal ist die Lösungsformel auch für $t < 0$ sinnvoll und man kann durch Einsetzen in die DGL nachprüfen, dass sie auch dort eine Lösung liefert.

Beispielsweise sieht man in Beispiel 5.23 sofort, dass $y(t) := y_0 e^{kt}$ nicht nur für $t \geq 0$, sondern für alle $t \in \mathbb{R}$ die DGL $y'(t) = k y(t)$ löst.

Bemerkung 5.27 Die Methode der Laplace-Transformation liefert nicht nur Lösungen der vorgelegten linearen Differentialgleichung n ter Ordnung, sondern automatisch Lösungen des vorgelegten Anfangswertproblems, mit den gewünschten Anfangswerten für $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

Bemerkung 5.28 Die Methode der Laplace-Transformation kann auch benutzt werden, um lineare Differentialgleichungen zu lösen, deren Inhomogenität b nicht notwendig stetig, sondern nur stückweise stetig ist.

Solche rechten Seiten ergeben sich sehr natürlich in den Anwendungen, etwa wenn ein Gerät über einen Schalter gesteuert wird.

Weitere Rechenregeln sind nützlich beim Umgang mit Laplace-Transformierten.

5.29 (Dämpfungssatz). Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar und $F := \mathcal{L}(f)$ die Laplace-Transformierte. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $e^{at}f(t)$ Laplace-transformierbar, mit Laplace-Transformierter

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s - a).$$

Also $e^{at}f(t) \circ \bullet F(s - a)$.

Beweis. Es ist

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t} dt = F(s - a).$$

Die nächste Regel ist der Rechtsverschiebungssatz (kurz: Verschiebungssatz). Man betrachtet eine Funktion, deren Graph aus dem von f durch Rechtsverschieben hervorgeht (wobei links Funktionswerte 0 ergänzt werden).

5.30 (Verschiebungssatz). Es sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar und $a \geq 0$. Definiere

$$g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} f(t - a) & \text{wenn } t \geq a \\ 0 & \text{wenn } t \in [0, a[. \end{cases}$$

Dann ist g Laplace-transformierbar mit Laplace-Transformierter

$$G(s) = e^{-as}F(s).$$

Beweis. Es ist

$$G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt = \int_a^\infty f(t-a) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(u) e^{-s(u+a)} dt = e^{-sa} F(s)$$

da $g(t) = 0$ für $t \in [0, a[$, musste nur über $t \geq a$ integriert werden. Anschließend wurde $u = t - a$, $du = dt$, $t = u + a$ substituiert und e^{-sa} aus $e^{-s(u+a)} = e^{-su} e^{-sa}$ vor das Integral gezogen.

Beim Strecken des Graphen ändert sich die Laplace-Transformierte wie folgt.

5.31 (Ähnlichkeitssatz). Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ Laplace-transformierbar. Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) := f(at)$ mit dem um den Faktor $1/a$ gestreckten Graphen. Dann ist

$$G(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

also $f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Beweis: Die Substitution $x = at$, $dx = a dt$, $t = x/a$ liefert

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(x) e^{-(s/a)x} \frac{1}{a} dx = a \int_0^\infty f(x) e^{-(s/a)x} dx = \frac{1}{a} F(s/a). \end{aligned}$$

5.32 (Laplace-Transformierte periodischer Funktionen). Eine Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ sei stückweise stetig und periodisch mit Periode $a > 0$, d.h. für alle $x \in [0, \infty[$ gelte $f(x+a) = f(x)$. Dann existiert $F(s) := \mathcal{L}(f)(s)$ für alle $s > 0$ und es gilt

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^a f(t) e^{-st} dt.$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \int_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-st} dt &= e^{-ans} \int_{na}^{(n+1)a} f(t) e^{-s(t-an)} dt = e^{-ans} \int_0^a f(x+an) e^{-sx} dx \\ &= e^{-ans} \int_0^a f(x) e^{-sx} dx \end{aligned}$$

unter Benutzung der Substitution $t = x + an$, $dt = dx$, wobei $f(x + an) = f(x)$ wegen der Periodizität. Es folgt

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-ans}}_{(e^{-as})^n} \int_0^a f(x)e^{-sx} dx = \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^a f(x)e^{-sx} dx,$$

wobei die Summenformel für die geometrische Reihe benutzt wurde.

Beispiel 5.33 (Laplace-Transformierte einer Rechteckschwingung mit Periode $a > 0$). Wir betrachten die Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit Periode a , welche festgelegt ist durch

$$f|_{[0, a/2]} = 1, \quad f|_{]a/2, 2a]} = -1.$$

Man berechne die Laplace-Transformierte F von f .

Lösung: Nach 5.32 ist

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \underbrace{\int_0^a f(t)e^{-st} dt}_{=: I}.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a/2} \underbrace{f(t)}_{=1} e^{-st} dt + \int_{a/2}^a \underbrace{f(t)}_{=-1} e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=a/2} + \left[\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=a/2}^a \\ &= -\frac{1}{s} e^{-as/2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-as} - \frac{1}{s} e^{-as/2} \\ &= \frac{1}{s} (1 - 2e^{-as/2} + e^{-as}) \\ &= \frac{1}{s} (1 - e^{-as/2})^2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-as}} I = \frac{1}{1 - e^{-as}} \frac{1}{s} (1 - e^{-as/2})^2 = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-as/2}}{1 + e^{-as/2}},$$

wobei benutzt wurde, dass $1 - e^{-as} = 1 - (e^{-as/2})^2 = (1 + e^{-as/2})(1 - e^{-as/2})$ nach der dritten binomischen Formel.

Exemplarisch lösen wir noch eine lineare Differentialgleichung, deren Inhomogenität nur stückweise stetig ist.

Beispiel 5.34 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) - y(t) = b(t), \quad y(0) = 1$$

wobei $b = 1_{[1,3[} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) des Intervalls $[1, 3[$ ist, also $b(t) = 1$ für $t \in [1, 3[$, sonst $b(t) = 0$. Beachten Sie, dass

$$b = 1_{[1,\infty[} - 1_{[3,\infty[}.$$

Die erste Funktion entsteht aus der konstanten 1-Funktion durch Verschieben des Graphen um 1 nach rechts (mit Funktionswert 0 links davon); die zweite Indikatorfunktion entsteht durch Verschieben um 3. Da

$$1 \circ \bullet \frac{1}{s},$$

liefert der Verschiebungssatz

$$1_{[1,\infty[} \circ \bullet e^{-s} \frac{1}{s}, \quad 1_{[3,\infty[} \circ \bullet e^{-3s} \frac{1}{s}.$$

Es gilt also

$$\mathcal{L}(b)(s) = \mathcal{L}(1_{[1,\infty[})(s) - \mathcal{L}(1_{[3,\infty[})(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}.$$

Anwenden von \mathcal{L} auf die vorgelegte Differentialgleichung liefert

$$\mathcal{L}(y')(s) - \mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(b)(s).$$

Mit $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ ist $\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$. Aus voriger Gleichung wird also

$$sY(s) - 1 - Y(s) = \mathcal{L}(b)(s) = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s},$$

was wir zu

$$(s-1)Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s} + 1$$

umschreiben. Teilen durch $s-1$ führt auf

$$Y(s) = (e^{-s} - e^{-3s}) \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{s-1}. \quad (34)$$

Wir benötigen noch die Partialbruchzerlegung des ersten Bruchs; Ansatz:

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}.$$

Multiplikation mit $s(s-1)$ führt auf die Bedingung

$$1 = A(s-1) + Bs.$$

Einsetzen von $s = 0$ liefert $A = -1$. Einsetzen von $s = 1$ liefert $B = 1$. Aus (34) wird also

$$\begin{aligned} Y(s) &= -(e^{-s} - e^{-3s})\frac{1}{s} + (e^{-s} - e^{-3s})\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \\ &= e^{-s} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) + e^{-3s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \right) + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Den letzten Summanden kennen wir: Es ist

$$e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}.$$

Erster Summand: Wir wissen, dass

$$e^t - 1 \circ \bullet \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Nach dem Verschiebungssatz müssen wir den Graphen der linken Funktion um 1 nach rechts schieben, um eine Funktion f mit Laplace-Transformierter

$$e^{-s} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right)$$

zu bekommen, es ist also

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \in [0, 1[; \\ e^{t-1} - 1 & \text{wenn } t \geq 1. \end{cases}$$

Entsprechend ist

$$1 - e^t \circ \bullet \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

und der zweite Summand nach dem Verschiebungssatz die Laplace-Transformierte der Funktion g , die durch

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \in [0, 3[; \\ 1 - e^{t-3} & \text{wenn } t \geq 3 \end{cases}$$

gegeben ist. Es folgt

$$y(t) = f(t) + g(t) + e^t = \begin{cases} e^t & \text{wenn } t \in [0, 1[; \\ e^{t-1} - 1 + e^t & \text{wenn } t \in [1, 3[; \\ e^{t-1} - 1 + 1 - e^{t-3} + e^t & \text{wenn } t \geq 3. \end{cases}$$

6 Differentialgleichungen lösen durch Potenzreihenansatz

Das folgende Resultat (das wir nicht beweisen) ist manchmal nützlich: Es liefert Lösungen von Differentialgleichungen in Form einer konvergenten Potenzreihe.

6.1 Seien $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sind $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ und $b(t)$ für t nahe 0 durch konvergente Potenzreihen gegeben, so ist für t nahe 0 auch die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

durch eine konvergente Potenzreihe gegeben, also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

mit Koeffizienten c_0, c_1, \dots in \mathbb{R} .

Beispiel 6.2 Lassen Sie uns durch einen Potenzreihenansatz nahe 0 die Lösung finden für das uns wohlbekannte Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$.

Wir setzen an $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten c_0, c_1, \dots in \mathbb{R} . Laut Anfangsbedingung muss

$$c_0 = y(0) = y_0$$

sein. Da konvergente Potenzreihen gliedweise abgeleitet werden dürfen, ist

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k t^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell+1} (\ell+1) t^{\ell}$$

mit $\ell := k - 1$. Schreiben wir wieder k statt ℓ , so ist also

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (k+1) t^k.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so wird also

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)t^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda c_k t^k$$

verlangt. Dies ist (genau) dann erfüllt, wenn die Koeffizienten vor t^k rechts und links gleich sind, also für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$c_{k+1}(k+1) = \lambda c_k$$

gilt, d.h.

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{k+1} \lambda.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{1} \lambda = y_0 \lambda, \\ c_2 &= \frac{c_1}{2} \lambda = \frac{y_0}{2} \lambda^2, \\ c_3 &= \frac{c_2}{3} \lambda = \frac{y_0}{3!} \lambda^3 \end{aligned}$$

und per Induktion

$$c_k = \frac{y_0}{k!} \lambda^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, somit

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_0}{k!} \lambda^k t^k = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = y_0 e^{\lambda t}.$$

Bemerkung 6.3 (a) Die Koeffizienten c_k der Potenzreihe $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ können stets rekursiv berechnet werden. Hierbei nutzt folgende Beobachtung: Sind Funktionen

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k$$

durch Potenzreihen gegeben, so ist wegen der Cauchyschen Produktformel für Produkte absolut konvergenter Reihen

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$$

mit

$$d_k = \sum_{\ell=0}^k f_{k-\ell} g_\ell \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dies wenden wir auf $a_j(t)y^{(j)}(t)$ an für $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

(b) Berechnet man die Koeffizienten c_k nur für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, so ist $\sum_{k=0}^n c_k t^k$ immerhin eine Näherungslösung für die Differentialgleichung für t nahe $t_0 = 0$.

Teil II: Mehrdimensionale Integralrechnung

7 Integration in \mathbb{R}^n

Wir wollen Funktionen in mehreren Variablen integrieren und Volumina von Körpern berechnen (etwa das Volumen einer Kugel mit Radius r).

Mehrdimensionale Integrale werden in Situationen wie den folgenden benötigt:

Beispiel 7.1 Ein Körper (Werkstück) fülle die Menge M im Raum \mathbb{R}^3 aus. Die Massendichte (in Gramm/Meter³) an der Stelle $(x, y, z) \in M$ sei $\rho(x, y, z)$. Dann ist

$$\int_M \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

die Gesamtmasse des Werkstücks (in Gramm).

Beispiel 7.2 Es sei $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ein Quader im Raum und $\rho(x_1, x_2, x_3)$ die elektrische Ladungsdichte an der Stelle $(x_1, x_2, x_3) \in Q$. Dann ist

$$\int_Q \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

die Gesamtladung im Quader.

7.3 Wie bekommen wir anschaulich die Gesamtladung in Beispiel 7.2, wenn wir die Ladungsdichte kennen?¹⁰ Wir unterteilen den Quader Q in kleine Quader Q_1, \dots, Q_N , die so klein sind, dass ρ auf jedem Q_k näherungsweise konstant ist, $\approx \rho_k$. Die in Q_k enthaltene Ladung ist dann näherungsweise

$$\rho_k v_3(Q_k)$$

mit dem dreidimensionalen Volumen $v_3(Q_k)$ des Quaders Q_k (dem Produkt der Seitenlängen); die Gesamtladung ist näherungsweise

$$\sum_{k=1}^N \rho_k v_3(Q_k).$$

¹⁰Und diese stetig ist.

Dann ist die Gesamtladung näherungsweise

$$\sum_{k=1}^N \rho_k v_3(Q_k)$$

und somit wollen wir ein Integral so bauen, dass

$$\int_Q \rho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{k=1}^N \rho_k v_3(Q_k).$$

Notationen für Quader

Folgende Notationen sind nützlich. Seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

7.4 Wir schreiben $a \leq b$, wenn $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, also

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots \text{ und } a_n \leq b_n.$$

Wir schreiben $a < b$, wenn $a_k < b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Zum Beispiel ist $(1, 3) \leq (1, 7)$ und $(1, 3) < (2, 7)$. Für $a := (1, 2)$ und $b := (2, 1)$ gilt weder $a \leq b$ noch $b \leq a$.

7.5 Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ wie oben mit $a \leq b$ definieren wir den zugehörigen Quader als

$$Q := [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}.$$

Dieser besteht aus allen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $a_k \leq x_k \leq b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, d.h. $x_k \in [a_k, b_k]$. Es ist also

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Ausführlicher nennen wir $Q = [a, b]$ auch einen *abgeschlossenen Quader*. Der zugehörige *offene Quader* ist definiert als

$$Q^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\} =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[.$$

Ist zwar $a \leq b$ aber nicht $a < b$, so ist $]a, b[= \emptyset$. Es gibt dann nämlich ein k mit $a_k = b_k$ und $a_k < x_k < b_k$ ist folglich nicht erfüllbar.

7.6 Wir definieren das *n-dimensionale Volumen* eines Quaders $Q := [a, b]$ mit $a \leq b$ als das Produkt der Seitenlängen,

$$v_n([a, b]) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Ist $a < b$, so ist $v_n(Q) > 0$. Ist $a_k = b_k$ für ein k , so ist $v_n(Q) = 0$.

7.7 Der *Durchmesser* $\text{diam}(Q)$ eines Quaders $Q := [a, b]$ mit $a \leq b$ ist definiert als die Länge der Diagonalen,

$$\text{diam}([a, b]) := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

Bemerkung 7.8 Ist $n = 1$, so sind Quader einfach abgeschlossene, beschränkte Intervalle $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a \leq b$; die zugehörigen offenen Quader sind offene Intervalle $]a, b[$. Das 1-dimensionale Volumen des Intervalls $[a, b]$ ist seine Länge $b - a$. Der Durchmesser $\text{diam}([a, b])$ des Intervalls ist ebenfalls $b - a$.

Ist $n = 2$, so sind Quader achsenparallele Rechtecke. Das 2-dimensionale Volumen eines Rechtecks ist sein Flächeninhalt.

Beispiel 7.9 Für $a = (1, 2)$, $b = (4, 3)$ ist $a < b$ (denn $1 < 4$ und $2 < 3$). Der Quader $Q := [a, b]$ ist das Rechteck

$$[1, 4] \times [2, 3]$$

mit dem Flächeninhalt

$$v_2(Q) = (4 - 1)(3 - 2) = 3$$

und dem Durchmesser

$$\text{diam}(Q) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}.$$

Es ist $a = (1, 2)$ die linke untere Ecke des Rechtecks, $b = (4, 3)$ seine rechte obere Ecke.

7.10 Es sei $Q = [a, b]$ ein Quader in \mathbb{R}^n . Eine *Zerlegung* von Q ist eine Menge Z von Quadern Q_1, \dots, Q_N derart, dass

$$(i) \quad Q_1, \dots, Q_N \subseteq Q;$$

- (ii) $Q_1 \cup \dots \cup Q_N = Q$;
 (iii) Für alle $j \neq k$ ist $Q_j^0 \cap Q_k^0 = \emptyset$.

Beispiel 7.11 Ein Beispiel mit $n = 2$, $N = 3$: Die Quader

$$[1, 2] \times [1, 2], \quad [1, 2] \times [2, 3] \quad \text{und} \quad [2, 4] \times [1, 3]$$

bilden eine Zerlegung des Quaders $[1, 4] \times [1, 3]$.

Definition des Integrals

Wir betrachten einen Quader $Q = [a, b]$ in \mathbb{R}^n mit $a \leq b$ und eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ (es gibt also ein $C \geq 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in Q$).

7.12 Für jede Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ von Q definieren wir die zugehörige Obersumme als

$$OS_Z(f) := \sum_{k=1}^N \sup f(Q_k) v_n(Q_k) \in \mathbb{R};$$

ist f stetig, so ist hierbei $\sup f(Q_k)$ der größte Funktionswert (Maximum) von f auf der kompakten (beschränkten und abgeschlossenen) Menge Q_k , welches nach dem Satz vom Maximum der Mathematik 2 existiert.¹¹ Es ist also $\sup f(Q_k) = f(x^*)$ für ein geeignetes $x^* \in Q_k$ (das von k abhängt). Die entsprechende Untersumme ist

$$US_Z(f) := \sum_{k=1}^N \inf f(Q_k) v_n(Q_k).$$

Ist f stetig, so ist für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ wieder $\inf(Q_k)$ der kleinste Funktionswert von f auf Q_k , also $\inf(Q_k) = f(x_*)$ für ein $x_* \in Q_k$.

7.13 Das *Oberintegral* von f ist definiert als

$$\int_Q^* f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := \inf\{OS_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } Q\},$$

es ist also das Infimum aller möglichen Obersummen. Das *Unterintegral* von f ist das Supremum aller Untersummen, also

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := \sup\{US_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } Q\}.$$

¹¹Siehe 7.48 im damaligen Skript; die Kompaktheit von Quadern war Beispiel 7.46.

7.14 Eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar*, wenn

$$\int_Q^* f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = {}_*\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Wir lassen dann die Sternchen weg und nennen den gemeinsamen Wert

$$\begin{aligned} \int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) &:= \int_Q^* f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ &= {}_*\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

das *Integral von f über Q* .

Bemerkung 7.15 (a) Ist $n = 1$, so stimmt die aktuelle Definition von Integrierbarkeit mit derjenigen der Mathematik 1 überein und es ist

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

wie in Mathematik 1.

(b) Man kann zeigen, dass jede stetige Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

(Interessierte finden die nicht prüfungsrelevante Erklärung in 7.29).

Der Satz von Fubini zur Integralberechnung

7.16 Satz von Fubini ($n = 2$). *Es sei $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar (z.B. f stetig).*

(a) *Existiert $F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$ für alle $x \in [a_1, b_1]$, so ist die Funktion $F: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und*

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Die Existenz von $F(x)$ ist automatisch, wenn f stetig ist.*¹²

¹²Für jedes $x \in [a_1, b_1]$ ist dann $[a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y)$ stetig und somit integrierbar.

- (b) Existiert $G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$ für alle $y \in [a_2, b_2]$, so ist die Funktion $G: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Die Existenz von $G(y)$ ist automatisch, wenn f stetig ist.

Wir lassen meist die Klammern weg und schreiben einfach

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx := \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx;$$

entsprechend bei der umgekehrten Integrationsreihenfolge.

Beispiel 7.17 Auf dem Rechteck $Q := [1, 2] \times [5, 9]$ betrachten wir die stetige Funktion $(x, y) \mapsto x$. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_Q x d(x, y) = \int_{x=1}^2 \underbrace{\int_{y=5}^9 x dy}_{[xy]_{y=5}^9 = 4x} dx = \int_{x=1}^2 4x dx = [4x^2/2]_{x=1}^2 = 2(4 - 1) = 6.$$

Auch die andere Integrationsreihenfolge liefert

$$\int_Q x d(x, y) = \int_{y=5}^9 \underbrace{\int_{x=1}^2 x dx}_{=[x^2/2]_{x=1}^2 = 3/2} dy = \int_{y=5}^9 3/2 dy = (9 - 5) \cdot 3/2 = 6.$$

Auch höherdimensionale Integrale lassen sich als iterierte Integrale berechnen, also auf gewöhnliche Integrale zurückführen.

7.18 Satz von Fubini. Es sei $Q = [a, b]$ ein Quader in \mathbb{R}^n und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Existiert das iterierte Integral

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1,$$

so stimmt es mit $\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$ überein.

Allgemeiner gilt:

Ist π eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$ (also eine bijektive Abbildung $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$) und existiert das iterierte Integral

$$\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \cdots \int_{a_{\pi(n)}}^{b_{\pi(n)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\pi(n)} \cdots dx_{\pi(1)},$$

so ist es gleich $\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$.

Bemerkung 7.19 Ist f stetig, so existieren die iterierten Integrale in 7.18 automatisch.

Der Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale (Bemerkung 11.18 im Skript Mathematik 2) zeigt nämlich, dass die Funktion

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n$$

stetig (und somit integrierbar) ist. Per Induktion ist ebenso die Funktion $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto \int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_{k+1}$$

stetig (und somit integrierbar) für alle $k \in \{n-1, n-2, \dots, 2\}$.

Mehr technischer Hintergrund

Wir geben mehr Hintergrund zum Integralbegriff. Für praktische Rechnungen benötigen wir diesen Abschnitt nicht.

7.20 Es seien $Q = [a, b]$ ein Quader in \mathbb{R}^n und sowohl $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ als auch $Z' = \{Q'_1, \dots, Q'_M\}$ Zerlegungen von Q . Wir nennen Z' *feiner* als Z , wenn jedes Q_j aus Z' in einem Q'_k aus Z enthalten ist.

Beispiel 7.21 Die Mengen

$$Q_1 := [1, 2] \times [3, 5] \quad \text{und} \quad Q_2 := [2, 3] \times [3, 5]$$

bilden eine Zerlegung Z des Rechtecks $Q := [1, 3] \times [3, 5]$. Die Mengen

$$Q'_1 := [1, 2] \times [3, 4], \quad Q'_2 := [1, 2] \times [4, 5] \quad \text{und} \quad Q'_3 := [2, 3] \times [3, 5]$$

bilden eine Zerlegung Z' von Q . Die Zerlegung Z' ist feiner als Z , denn es gilt

$$Q'_1 \subseteq Q_1, \quad Q'_2 \subseteq Q_1, \quad Q'_3 \subseteq Q_2.$$

Bemerkung 7.22 Ist $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ eine Zerlegung des Quaders $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q^0 \neq \emptyset$ (also $a < b$ bzw. $v_n(Q) > 0$), so bilden auch die Q_k mit $Q_k^0 \neq \emptyset$ eine Zerlegung. Die anderen Quader haben Volumen 0 und spielen für Ober- und Untersummen keinen Beitrag. Wir brauchen dann also nur Zerlegungen anzuschauen aus Quadern mit positivem Volumen.

[Details: Es sei A die Vereinigung der Q_k mit $Q_k^0 \neq \emptyset$ und B die Vereinigung der verbleibenden Quader, bei denen eine der Seitenlängen 0 ist. Dann ist A eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n und

$$Q = A \cup B.$$

Sei $x \in B$. Die Menge B kann nicht die ganze offene Kugel $B_{1/k}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Radius $1/k$ um x enthalten oder auch nur $B_{1/k}(x) \cap Q$, es gibt daher ein $x_k \in A \cap B_{1/k}(x)$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x.$$

Da alle x_k in A sind und A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$, also $B \subseteq A$, also $Q = A \cup B = A$.]

Bemerkung 7.23 Es seien $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ und $Z' = \{Q'_1, \dots, Q'_M\}$ Zerlegungen des Quaders Q , welche beide nur aus Quadern positiven Volumens bestehen. Ist Z' feiner als Z , so ist jedes Q_k aus Z gleich der Vereinigung A der Q'_j mit $Q'_j \subseteq Q_k$.

[Details: Jedes $x \in Q_k^0$ ist in einem Q'_j enthalten. Da Z' feiner ist als Z , ist Q'_j in einem Q_ℓ enthalten. Für ein $\varepsilon > 0$ enthält Q_k^0 eine ε -Kugel um x und diese enthält ein Element x' aus $(Q'_j)^0$, da jeder Punkt im abgeschlossenen Quader Grenzwert einer Folge von Punkten im offenen Quader ist. Dann ist $x' \in Q_k^0 \cap Q_\ell^0$, also $\ell = k$ und somit $(Q'_j)^0 \subseteq Q_k$. Da Q_k abgeschlossen ist, folgt $Q'_j \subseteq Q_k$. Somit ist $Q_k^0 \subseteq A$. Da A abgeschlossen ist, folgt $Q_k \subseteq A$.]

7.24 Es sei $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $a < b$. Dann gibt es zu je zwei Zerlegungen $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ und $Z' = \{Q'_1, \dots, Q'_M\}$ von Q eine *gemeinsame Verfeinerung*, also eine Zerlegung Z'' von Q , welche feiner als Z ist und feiner als Z' . Diese kann als *Gitter-Zerlegung* gewählt werden, d.h. es gibt Zahlen

$$a_i = t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,N_i} = b_i$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass Z'' aus den Quadrern

$$[t_{1,j_1-1}, t_{1,j_1}] \times \cdots \times [t_{n,j_n-1}, t_{n,j_n}]$$

besteht mit natürlichen Zahlen $1 \leq j_i \leq N_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ist nämlich $Q_k = [\alpha_k, \beta_k]$ und $Q_j = [\alpha'_j, \beta'_j]$, so sei K_i die Menge aller auftretenden i -Komponenten der Punkte $\alpha_k, \beta_k, \alpha'_j$ und β'_j aus \mathbb{R}^n . Die Menge K_i besteht aus Zahlen

$$a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \cdots < t_{i,N_i} = b_i$$

und diese leisten das Gewünschte.

(Wir legen also ein Gitternetz über die gegebenen Zerlegungen).

7.25 Ist $Q = [a, b]$ ein Quader in \mathbb{R}^n und Z eine Zerlegung von Q , bestehend aus den Quadrern Q_1, \dots, Q_N , so ist

$$v_n(Q) = \sum_{k=1}^N v_n(Q_k). \quad (35)$$

Wenn gewünscht finden Sie hier den rechnerischen Nachweis: Die Formel ist klar, wenn $v_n(Q) = 0$, also eine Seitenlänge von Q (und somit eine von jedem Q_j) gleich 0 ist. Sei nun $v_n(Q) > 0$.

Spezialfall: Wir nehmen zuerst an, dass Z eine Gitterzerlegung von Q ist, also aus Quadrern

$$Q_{j_1, \dots, j_n} = [t_{1,j_1-1}, t_{1,j_1}] \times \cdots \times [t_{n,j_n-1}, t_{n,j_n}]$$

besteht mit $a_i = t_{i,0} < \cdots < t_{i,N_i} = b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Unter Benutzung von Teleskopsummen ist dann

$$\begin{aligned} v_n(Q) &= (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = (t_{1,N_1} - t_{1,0}) \cdots (t_{n,N_n} - t_{n,0}) \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^{N_1} (t_{1,j_1} - t_{1,j_1-1}) \right) \cdots \left(\sum_{j_n=1}^{N_n} (t_{n,j_n} - t_{n,j_n-1}) \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{N_n} (t_{1,j_1} - t_{1,j_1-1}) \cdots (t_{n,j_n} - t_{n,j_n-1}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{N_n} v_n(Q_{j_1, \dots, j_n}) \end{aligned}$$

die Summe der Volumina der Teilquader, wie behauptet.

Allgemein: Die Quader in Z von positivem Volumen bilden eine Zerlegung von Q und die Summe der Volumina ist unverändert. Wir dürfen daher annehmen, dass jeder Quader in Z positives Volumen hat. Wir wählen eine Gitterzerlegung Z' , die feiner als Z ist. Nach dem Vorigen ist dann $v_n(Q)$ gleich der Summe der Volumina der Teilquader der Gitterzerlegung. Für jeden Quader Q_k aus Z bilden aber die in Q_k enthaltenen Quader P aus Z' eine Gitterzerlegung. Somit ist

$$v_n(Q) = \sum_{P \in Z'} v_n(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{P \in Z', P \subseteq Q_k} v_n(P) = \sum_{k=1}^n v_n(Q_k).$$

Dies beendet den Nachweis von (35).

7.26 Es seien $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$ ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sowohl Z als auch Z' Zerlegungen von Q . Dann gilt:

(a) $US_Z(f) \leq OS_Z(f)$.

(b) Ist Z' feiner als Z , so ist

$$OS_{Z'}(f) \leq OS_Z(f) \quad \text{und} \quad US_{Z'}(f) \geq US_Z(f).$$

(c) Es gilt $US_{Z'}(f) \leq OS_Z(f)$.

Beweis. (a) Sei $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$. Da $\inf f(Q_k) \leq \sup f(Q_k)$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$, ist

$$US_Z(f) = \sum_{k=1}^N \inf f(Q_k) v_n(Q_k) \leq \sum_{k=1}^N \sup f(Q_k) v_n(Q_k) = OS_Z(f).$$

(b) Wir beweisen die erste Ungleichung (die zweite zeigt man analog). Ist $v_n(Q) = 0$, so sind Obersummen 0 und die Ungleichung gilt. Sei nun $v_n(Q) > 0$. Nach Weglassen von Teilquader vom Volumen 0 (was die Obersummen nicht ändert) dürfen wir annehmen, dass jeder Teilquader aus Z' positives Volumen hat und ebenso jeder aus Z . Sei $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ und $Z' = \{Q'_1, \dots, Q'_M\}$. Für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ ist dann

$$Z'_k := \{P \in Z' : P \subseteq Q_k\}$$

eine Zerlegung von Q_k und jedes $P \in Z'$ kommt nur in einer solchen Menge vor, also $Z'_k \cap Z'_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$. Also ist

$$\begin{aligned} OS_Z(f) &= \sum_{k=1}^N \sup f(Q_k) v_n(Q_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{P \in Z'_k} \sup f(Q_k) v_n(P) \\ &\geq \sum_{k=1}^N \sum_{P \in Z'_k} \sup f(P) v_n(P) = OS_{Z'}(f); \end{aligned}$$

für das zweite Gleichheitszeichen wurde hier (7.25) benutzt. Da $Q_k \supseteq P$ wenn $P \in Z'_k$, ist $f(Q_k) \geq \sup f(P)$; dies begründet die anschließende Ungleichung.

(c) Sei Z'' eine gemeinsame Verfeinerung für Z und Z' . Nach (a) und (b) ist dann

$$US_{Z'}(f) \leq US_{Z''}(f) \leq OS_{Z''}(f) \leq OS_Z(f).$$

Wir halten noch eine Charakterisierung integrierbarer Funktionen fest.

7.27 Für eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Zerlegungen Z und Z' von Q derart, dass $OS_Z(f) - US_{Z'}(f) < \varepsilon$.
- (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung Z von Q derart, dass $OS_Z(f) - US_Z(f) < \varepsilon$.

Begründung: (a) \Rightarrow (b): Ist f integrierbar, so sind Ober- und Unterintegral gleich. Per Definition des Oberintegrals als Infimum gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q derart, dass

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + \frac{\varepsilon}{2} > OS_Z(f).$$

Analog finden wir eine Zerlegung Z' von Q mit

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) - \frac{\varepsilon}{2} < US_{Z'}(f).$$

Dann ist $US_{Z'}(f) > OS_Z(f) - \varepsilon$.

(b) \Rightarrow (c): Gegeben $\varepsilon > 0$ seien Z und Z' wie in (b). Ist Z'' eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z' , so gilt nach 7.26

$$OS_{Z''}(f) - US_{Z''}(f) \leq OS_Z(f) - US_{Z'}(f) < \varepsilon.$$

(c) \Rightarrow (a) Sei $S := \int_Q^* f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$ das Oberintegral und $s := \int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$. Für jede Zerlegung Z' von Q gilt für jede Zerlegung Z von Q

$$US_{Z'}(f) \leq OS_Z(f);$$

Übergang zum Infimum in Z liefert

$$US_{Z'}(f) \leq S;$$

Übergang zum Supremum in Z' liefert $s \leq S$, so dass also immer

$$*\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \leq \int_Q^* f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ sei Z wie in (c). Dann gilt

$$OS_Z(f) \geq S \geq s \geq US_Z(f) > OS_Z(f) - \varepsilon,$$

also $0 \leq S - s < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $S = s$.

7.28 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Die *Maschenweite* $\text{mesh}(Z)$ einer Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ von Q ist definiert als das Maximum der vorkommenden Durchmesser $\text{diam}(Q_1), \dots, \text{diam}(Q_N)$.

7.29 Begründung für Bemerkung 7.15 (b), die Integrierbarkeit einer stetigen Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q = [a, b] \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$. Da Q beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt ist (siehe Beispiel 7.46 im Mathematik 2-Skript), ist die stetige Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ nach 7.52 im Mathematik 2-Skript gleichmäßig stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ derart, dass $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in Q$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wählen wir eine Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ von Q mit Maschenweite $\leq \delta$, so ist für alle $x, y \in Q_k$ der Abstand $|x - y| \leq \delta$ und somit $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, woraus

$$\sup f(Q_k) + \inf f(Q_k) \leq \varepsilon$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} OS_Z(f) &= \sum_{k=1}^N \sup_{\substack{f(Q_k) \\ \leq \inf f(Q_k) + \varepsilon}} v_n(Q_k) \geq \sum_{k=1}^N \inf f(Q_k) v_n(Q_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^n v_n(Q_k) \\ &= US_Z(f) + \varepsilon v_n(Q) \end{aligned}$$

und folglich $OS_Z(f) - US_Z(f) \leq \varepsilon v_n(Q)$, was beliebig klein gemacht werden kann. Nach 7.27 (c) ist f also integrierbar.

Eigenschaften des Integrals über Quader

Ähnlich wie für Funktionen einer reellen Variablen zeigt man die folgenden Eigenschaften des Integrals. Statt $\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$ schreiben wir im Folgenden auch kurz $\int_Q f(x) dx$.

7.30 (Eigenschaften). *Es sei $Q = [a, b]$ ein Quader in \mathbb{R}^n und es seien $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

- (a) (Linearität des Integrals) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und es ist*

$$\int_Q \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_Q f(x) dx + \beta \int_Q g(x) dx.$$

- (b) (Monotonie) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in Q$, so ist $\int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx$.*

- (c) (Integralabschätzung) *Es ist $|f|: Q \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$ integrierbar und*

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx.$$

- (d) (Produkte) *Auch $fg: Q \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ ist integrierbar.*

Riemannsche Summen

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir eine weitere Sichtweise auf Integrale.

7.31 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Weiter sei $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ eine Zerlegung von Q in Quader $Q_k \neq \emptyset$ und es sei ein Punkt $x_k \in Q_k$ gewählt für $k \in \{1, \dots, N\}$. Wir nennen dann $B = (x_1, \dots, x_N)$ eine zur Zerlegung gehörige *Belegung* und

$$\Sigma_{Z,B}(f) := \sum_{k=1}^N f(x_k) v_n(Q_k)$$

die zugehörige *Riemannsche Summe*.

Statt des Supremums oder Infimums von $f(Q_k)$ wie in der Ober- bzw. Unter-
summe benutzen wir also einen beliebigen Funktionswert $f(x_k)$ von f auf Q_k .
Wir erwähnen ohne Beweis:

7.32 Eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann integrierbar, wenn für jede Folge $(Z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen Z_m von Q mit Maschenweite $\text{mesh}(Z_m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ und jede Folge $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Belegungen B_m zu Z_m der Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_{Z_m, B_m}(f)$$

existiert. In diesem Fall ist

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_{Z_m, B_m}(f)$$

für jede solche Folge $(Z_m, B_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Jordan-messbare Mengen und ihr Volumen

Wir führen nun Mengen ein, denen sich ein n -dimensionales Volumen zuordnen lässt.

7.33 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $M \subseteq Q$. Wir nennen die Menge M *Jordan-messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion

$$1_M: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in M; \\ 0 & \text{wenn } x \in Q \setminus M \end{cases}$$

integrierbar ist. In diesem Fall nennen wir

$$\text{vol}_n(M) := \int_Q 1_Q(x) dx$$

das *n-dimensionale Volumen* von M .

Bemerkung 7.34 Es lässt sich zeigen, dass die Eigenschaft der Jordan-Messbarkeit von M (und auch der Zahlenwert von $\text{vol}_n(M)$) unabhängig sind von der Wahl des Quaders Q .

Beispiel 7.35 Wir betrachten einen Quader $M := [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$. Dann ist

$$\text{vol}_n(M) = v_n(M) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Wir können nämlich $Q := M$ nehmen in 7.33. Dann ist $1_M = 1$ die konstante 1-Funktion auf $Q = M$ und mit dem Satz von Fubini

$$\text{vol}_n(M) = \int_{[a,b]} 1 d(x_1, \dots, x_n) = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} 1 dx_n \dots dx_1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Beispiel 7.36 Da $1_\emptyset = 0$, ist die leere Menge Jordan-messbar mit $\text{vol}_n(\emptyset) = 0$.

7.37 (Eigenschaften des n -dimensionalen Volumens). *Sind M_1 und M_2 Jordan-messbare Teilmengen von \mathbb{R}^n , so sind auch*

$$M_1 \cap M_2, \quad M_1 \cup M_2 \quad \text{und} \quad M_1 \setminus M_2$$

Jordan-messbar und es gilt

$$\text{vol}_n(M_1 \cup M_2) = \text{vol}_n(M_1) + \text{vol}_n(M_2) - \text{vol}_n(M_1 \cap M_2). \quad (36)$$

Ist $\text{vol}_n(M_1 \cap M_2) = 0$, so gilt also

$$\text{vol}_n(M_1 \cup M_2) = \text{vol}_n(M_1) + \text{vol}_n(M_2). \quad (37)$$

Nach (7.36) gilt (37) insbesondere immer, wenn die Jordan-messbaren Mengen M_1 und M_2 disjunkt sind (also $M_1 \cap M_2 = \emptyset$).

Beweis: Wir wählen einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M_1 \subseteq Q$ und $M_2 \subseteq Q$. Für die charakteristischen Funktionen auf Q gilt dann

$$1_{M_1 \cap M_2} = 1_{M_1} 1_{M_2},$$

denn $1_{M_1}(x)1_{M_2}(x)$ ist 1 für $x \in M_1 \cap M_2$ und sonst 0. Als Produkt integrierbarer Funktionen ist $1_{M_1 \cap M_2}$ integrierbar nach 7.30 (d). Also ist $M_1 \cap M_2$ Jordan-messbar. Da

$$1_{M_1 \setminus M_2} = 1_{M_1} - 1_{M_1 \cap M_2}$$

nach 7.30 (a) integrierbar ist, ist $M_1 \setminus M_2$ Jordan-messbar. Schließlich ist nach 7.30 (a)

$$1_{M_1 \cup M_2} = 1_{M_1} + 1_{M_2} - 1_{M_1 \cap M_2}$$

integrierbar mit Integral

$$\int_Q 1_{M_1}(x) dx + \int_Q 1_{M_2}(x) dx - \int_Q 1_{M_1 \cap M_2}(x) dx = \text{vol}_n(M_1) + \text{vol}_n(M_2) - \text{vol}_n(M_1 \cap M_2),$$

also $M_1 \cup M_2$ integrierbar mit dem durch (36) gegebenem Volumen.

Bemerkung 7.38 In 7.33 sei $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ eine Zerlegung von M . Für $k \in \{1, \dots, N\}$ ist

$$\sup 1_M(Q_k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } Q_k \cap M \neq \emptyset; \\ 0 & \text{wenn } Q_k \cap M = \emptyset. \end{cases}$$

Folglich ist

$$OS_Z(1_M) = \sum_{k=1}^N \sup 1_M(Q_k) v_n(Q_k) = \sum_{Q_k \cap M \neq \emptyset} v_n(Q_k).$$

Für $k \in \{1, \dots, N\}$ ist weiter

$$\inf 1_M(Q_k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } Q_k \subseteq M; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$US_Z(1_M) = \sum_{k=1}^N \inf 1_M(Q_k) v_n(Q_k) = \sum_{Q_k \subseteq M} v_n(Q_k).$$

Die Differenz von $OS_Z(M)$ und $US_Z(M)$ ist die Summe der $v_n(Q_k)$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$ derart, dass $Q_k \cap M \neq \emptyset$ aber Q_k nicht in M enthalten ist, also $Q_k \cap (Q \setminus M) \neq \emptyset$.

7.39 Nach 7.27 ist $M \subseteq Q$ genau dann Jordan-messbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ von Q gibt derart, dass

$$\varepsilon > OS_Z(1_M) - US_Z(1_M) = \sum_{Q_k \cap M \neq \emptyset \wedge Q_k \cap (Q \setminus M) \neq \emptyset} v_n(Q_k).$$

Eine nützlichere Charakterisierung von Jordan-Messbarkeit nutzt den folgenden Begriff.

7.40 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Nullmenge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Quader Q_1, \dots, Q_N existieren derart, dass

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^N v_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Man könnte dies auch wie folgt umformulieren: M ist Jordan-messbar mit $\text{vol}_n(M) = 0$. Die obige Formulierung ist aber nützlicher.

Wir erinnern an den Begriff des Randes einer Teilmenge von \mathbb{R}^n (siehe Definition 7.49 im Mathematik 2-Skript von Prof. Glöckner):

7.41 Der *Rand* einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge ∂M aller $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(x)$ um x sowohl ein Element aus M als auch ein Element des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus M$ enthält.

Die Charakterisierung von Jordan-Messbarkeit lautet nun wie folgt:

7.42 *Eine beschränkte Menge M von \mathbb{R}^n ist genau dann eine Jordan-Nullmenge, wenn ihr Rand ∂M eine Jordan-Nullmenge ist.*

Wir werden sehen, dass sich diese Bedingung oft leicht nachprüfen lässt. Dabei nutzt es, Beispiele von Jordan-Nullmengen zu kennen. Uns nutzt:

7.43 (Neue Jordan-messbare Mengen aus gegebenen).

- (a) *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge, so ist auch jede Teilmenge $L \subseteq M$ eine Jordan-Nullmenge.*

[Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es Quader Q_1, \dots, Q_N mit Gesamtvolumen $< \varepsilon$, so dass $M \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k$ und somit erst recht $L \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k$ ist.]

(b) Sind M_1, \dots, M_k endlich viele Jordan-Nullmengen in \mathbb{R}^n , so ist auch ihre Vereinigung $M_1 \cup \dots \cup M_k$ eine Jordan-Nullmenge.

[Für $k = 2$ folgt dies wegen (a) aus (37). Für höhere k bekommt man die Aussage durch Induktion.]

(c) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \pi(x)$ die Abbildung, welche zwei gegebene Komponenten vertauscht (z.B. x_1 und x_2), so ist auch $\pi(M)$ eine Jordan-Nullmenge.

[Ist $M \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k$ mit $\sum_{k=1}^N v_n(Q_k) < \varepsilon$, so ist $\pi(M) \subseteq \bigcup_{k=1}^N \pi(Q_k)$. Hier ist $\pi(Q_k)$ ein Quader mit den gleichen Seitenlängen wie Q_k (nur in anderer Reihenfolge), also $v_n(\pi(Q_k)) = v_n(Q_k)$, also $\sum_{k=1}^N v_n(\pi(Q_k)) < \varepsilon$.]

Grundbeispiele sind nun wie folgt:

Beispiel 7.44 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge, so ist $M \times B$ eine Jordan-Nullmenge in \mathbb{R}^{n+m} .

[Es ist $B \subseteq [-R, R]^m =: W$ für ein $R > 0$. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es Quader Q_1, \dots, Q_N in \mathbb{R}^n mit $M \subseteq \bigcup_{k=1}^N Q_k$ und $\sum_{k=1}^N v_n(Q_k) < \varepsilon$. Für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ ist dann $Q_k \times W$ ein Quader in \mathbb{R}^{n+m} mit

$$v_{n+m}(Q_k \times W) = (2R)^m v_n(Q_k).$$

Ist nämlich $Q_k = [a, b]$, so ist ja $Q_k \times W = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times [-R, R]^m$ mit $(n + m)$ -dimensionalem Volumen

$$(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) (2R)^m = \text{vol}_n(Q_k) (2R)^m.$$

Weiter ist $M \times B \subseteq M \times W \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^N Q_k \right) \times W = \bigcup_{k=1}^N (Q_k \times W)$ und $\sum_{k=1}^N v_{n+m}(Q_k \times W) = \sum_{k=1}^N v_n(Q_k) (2R)^m < \varepsilon (2R)^m$, was beliebig klein gemacht werden kann.]

Beispiel 7.45 Für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in Q\}$$

eine Jordan-Nullmenge in \mathbb{R}^{n+1} .

Allgemeiner:

Beispiel 7.46 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion, so ist $\text{graph}(f)$ eine Jordan-Nullmenge in \mathbb{R}^{n+1} .

Wir überspringen den Nachweis.

[Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, der M enthält. Nach Vergrößern dürfen wir annehmen, dass $v_n(Q) > 0$. Es ist $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in M$, mit $C > 0$. Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir eine Zerlegung Z von Q mit

$$OS_Z(1_M) - US_Z(1_M) < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Seien Q_1, \dots, Q_ℓ diejenigen Quader aus Z , die ganz in M enthalten sind. Da jeder dieser beschränkt und abgeschlossen ist, ist auch $K := Q_1 \cup \dots \cup Q_\ell$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Auf der kompakten Menge K ist die stetige Funktion f gleichmäßig stetig. Es gibt daher ein $\delta > 0$ derart, dass $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2v_n(Q)} =: \varepsilon'$ für alle $x, y \in K$ mit $|x - y| \leq \delta$. Nach Zerlegen der Quader Q_1, \dots, Q_ℓ in endlich viele kleinere Quader dürfen wir annehmen, dass $\text{diam}(Q_j) \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \dots, \ell\}$, somit

$$f(Q_j) \subseteq [f(x_j), f(x_j) + \varepsilon']$$

mit $\min f(Q_j) = f(x_j)$. Dann ist

$$\text{graph}(f) \subseteq \bigcup_P P \times [-C, C] \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j \times [f(x_j), f(x_j) + \varepsilon'],$$

wobei P die Menge der Quader aus Z mit $P \cap M \neq \emptyset$ und $M \cap (Q \setminus M) \neq \emptyset$ durchläuft. Es ist

$$\sum_P v_{n+1}(P \times [-C, C]) = 2C \sum_P v_n(P) = 2C(OS_Z(1_M) - US_Z(1_M)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\sum_{j=1}^{\ell} v_{n+1}(Q_j \times [f(x_j), f(x_j) + \varepsilon']) = \sum_{j=1}^{\ell} v_n(Q_j) \varepsilon' \leq v_n(Q) \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also ist $\text{graph}(f)$ in einer Vereinigung von Quadern enthalten, deren Volumina in der Summe $\leq \varepsilon$ sind.]

7.47 Folgerung. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und ∂M eine Vereinigung von endlich vielen Mengen, die Graphen stetiger reellwertiger Funktionen auf Quadern oder Jordan-messbaren Mengen sind (oder durch Vertauschen von Koordinaten aus solchen Graphen hervorgehen), so ist M Jordan-messbar.

Beispiel 7.48 Wir betrachten die Ellipse

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y/2)^2 \leq 1\}$$

mit den Halbachsen 1 und 2. Diese ist enthalten im Quader

$$Q := [-1, 1] \times [-2, 2],$$

also beschränkt. Weiter ist

$$\partial M = \{(x, 2\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, -2\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1, 1]\}$$

die Vereinigung von zwei Graphen stetiger Funktionen, also eine Jordan-Nullmenge. Die Ellipse M ist also eine Jordan-messbare Teilmenge von \mathbb{R}^2 . Wir wollen ihr 2-dimensionales Volumen berechnen (also ihren Flächeninhalt). Es ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) &= \int_{[-1,1] \times [-2,2]} 1_M(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-2}^2 1_M(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 4\sqrt{1-x^2} dx; \end{aligned}$$

wir haben hierbei den Satz von Fubini angewandt und dann ausgenutzt, dass für festes $x \in [-1, 1]$ nur dann $1_M(x, y) \neq 0$, wenn $-2\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}$; in diesem Fall ist $1_M(x, y) = 1$. Die Substitution $x = \sin(t)$ mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $dx = \cos(t) dt$ liefert nun

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(M) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \sqrt{\underbrace{1 - \sin^2 t}_{=\cos^2 t}} \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \underbrace{\cos^2 t}_{=(1/2)(1+\cos(2t))} dt \\ &= 2\pi + 2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt}_{=0} = 2\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.49 Wir haben in der Mathematik 2 gesehen (in Bemerkung 7.51 (c)), dass der Rand ∂M einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ immer eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist (und $\partial M = \overline{M} \setminus M^0$ gilt mit dem Abschluss \overline{M} und dem Inneren M^0). Ist M beschränkt, so auch ∂M ; als abgeschlossene, beschränkte Menge ist ∂M dann also kompakt (nach Satz 7.44 im Mathematik 2-Skript).

Integrale über Jordan-messbare Mengen

Definition 7.50 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wählen einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq Q$ und betrachten die Funktion

$$f_Q: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in M; \\ 0 & \text{wenn } x \in Q \setminus M, \end{cases}$$

die aus f durch Fortsetzen mit dem Funktionswert 0 entsteht. Ist f_Q integrierbar, so nennen wir f *integrierbar* und setzen

$$\int_M f(x) dx := \int_Q f_Q(x) dx.$$

7.51 Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar (z.B. f stetig), so ist auch $f|_M$ integrierbar für jede Jordan-messbare Teilmenge $M \subseteq Q$.

Die durch Fortsetzen mit dem Funktionswert 0 aus $f|_M$ entstehende Funktion $(f|_M)_Q: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist nämlich gleich $1_M f$ mit der charakteristischen Funktion $1_M: Q \rightarrow \mathbb{R}$ von M . Nach 7.30 (d) ist dieses Produkt integrierbarer Funktionen ebenfalls integrierbar.

Ähnlich sehen wir:

7.52 Sind M und N Jordan-messbare Teilmengen von \mathbb{R}^n mit $N \subseteq M$ und ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f|_N$ integrierbar. Weiter gilt

$$\int_N f(x) dx = \int_M f(x) 1_N^M(x) dx$$

mit der charakteristischen Funktion $1_N^M: M \rightarrow \mathbb{R}$ von N ,

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in N; \\ 0 & \text{wenn } x \in M \setminus N. \end{cases}$$

[Da $f|_N = (f_Q)|_N$, ist $f|_N$ nach 7.51 integrierbar. Da $(f|_N)_Q = (f1_N^M)_Q$, ist $\int_N f(x) dx = \int_Q (f|_N)_Q(x) dx = \int_Q (f1_N^M)(x) dx = \int_M f(x)1_N^M(x) dx.$]

Definition 7.53 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge mit $\text{vol}_n(M) > 0$, so definiert man

$$\bar{x}_j := \frac{1}{\text{vol}_n(M)} \int_M x_j d(x_1, \dots, x_n)$$

und nennt $\bar{x} := (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ den *Schwerpunkt* von M (bei konstanter Massendichte).

Allgemeiner:

Definition 7.54 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $\rho: M \rightarrow [0, \infty[$ eine integrierbare Funktion mit $m := \int_M \rho(x) dx > 0$, so definiert man den Schwerpunkt von M zur Massendichte ρ als $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ mit

$$\bar{x}_j := \frac{1}{m} \int_M x_j \rho(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Beispiel 7.55 Man berechne den Schwerpunkt $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ des Viertelkreises

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

(bei konstanter Massendichte).

Es ist $\text{vol}_2(M)$ gleich einem Viertel des Flächeninhalts des Einheitskreises, also $\text{vol}_2(M) = \frac{1}{4}\pi$ (was man ähnlich wie im Beispiel 7.48 explizit nachrechnen könnte). Wir berechnen

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{\text{vol}_2(M)} \int_M x_1 d(x_1, x_2).$$

Es ist M im Würfel $[0, 1]^2$ enthalten. Weiter ist M Jordan-messbar, denn der Rand von M ist die Vereinigung von drei Jordan-Nullmengen, nämlich dem Graphen von $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x_1 \mapsto \sqrt{1 - x_1^2}$ sowie der Strecke $[0, 1] \times \{0\}$, die Graph der 0-Funktion auf $[0, 1]$ ist und der Strecke $\{0\} \times [0, 1]$, die daraus durch Vertauschen von x_1 und x_2 hervorgeht. Die Funktion $\text{pr}_1: Q \rightarrow \mathbb{R}$,

$(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ist stetig, somit integrierbar. Also ist auch $\text{pr}_1|_M$ integrierbar. Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M x_1 d(x_1, x_2) &= \int_{[0,1]^2} x_1 1_M(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 x_1 1_M(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{\sqrt{1-x_1^2}} x_1 dx_2 dx_1 = \int_{x_1=0}^1 x_1 \sqrt{1-x_1^2} dx_1 \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-x_1^2)^{3/2} \right]_{x_1=0}^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Für das dritte Gleichheitszeichen haben wir ausgenutzt, dass für gegebenes x_1 der Funktionswert $1_M(x_1, x_2)$ nur für $0 \leq x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}$ von Null verschieden (und dann = 1) ist. Es ist also

$$\bar{x}_1 = \frac{1/3}{\pi/4} = \frac{4}{3\pi}.$$

Die gleiche Rechnung liefert $\bar{x}_2 = \frac{4}{3\pi}$.

Eigenschaften des Integrals über Jordan-messbare Teilmengen

Die Eigenschaften in 7.30 (a)–(d) gelten unverändert, wenn man den dortigen Quader Q durch eine Jordan-messbare Teilmenge $M \subseteq Q$ ersetzt.

7.56 Zum Beispiel ist auch das Integral über M linear: Sind $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und α, β reelle Zahlen, so ist $\alpha f + \beta g: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\int_M \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_M f(x) dx + \beta \int_M g(x) dx.$$

[Es ist nämlich $(\alpha f + \beta g)_Q = \alpha f_Q + \beta g_Q$ integrierbar nach 7.30 (a) (also $\alpha f + \beta g$ integrierbar) mit

$$\int_Q (\alpha f_Q(x) + \beta g_Q(x)) dx = \alpha \int_Q f_Q(x) dx + \beta \int_Q g_Q(x) dx.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $\int_M \alpha f(x) + \beta g(x) dx$, die rechte gleich $\alpha \int_M f(x) dx + \beta \int_M g(x) dx$.]

Von Integralen für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einer reellen Variablen kennen wir die wichtige Formel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

für $c \in [a, b]$. Ähnlich haben wir für Mehrfachintegrale:

7.57 Sind $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare Mengen und ist $f: M_1 \cup M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx = \int_{M_1} f(x) dx + \int_{M_2} f(x) dx - \int_{M_1 \cap M_2} f(x) dx.$$

Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ oder $M_1 \cap M_2$ eine Jordan-Nullmenge, so ist

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx = \int_{M_1} f(x) dx + \int_{M_2} f(x) dx.$$

[Begründung: Nach 7.37 sind $M := M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ Jordan-messbar. Nach 7.52 sind $f|_{M_1}$, $f|_{M_2}$ und $f|_{M_1 \cap M_2}$ integrierbar. Mit auf M definierten charakteristischen Funktionen gilt $1 = 1_{M_1}^M + 1_{M_2}^M - 1_{M_1 \cap M_2}^M$ und somit

$$\begin{aligned} \int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx &= \int_M f(x)(1_{M_1}^M(x) + 1_{M_2}^M(x) - 1_{M_1 \cap M_2}^M(x)) dx \\ &= \int_M f(x)1_{M_1}^M(x) dx + \int_M f(x)1_{M_2}^M(x) dx - \int_M f(x)1_{M_1 \cap M_2}^M(x) dx \\ &= \int_{M_1} f(x) dx + \int_{M_2} f(x) dx - \int_{M_1 \cap M_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Linearität des Integrals benutzt und anschließend 7.52.]

Abändern von Funktionen auf Nullmengen

Man darf Funktionen auf Jordan-Nullmengen abändern, ohne Integrierbarkeit und den Wert des Integrals zu ändern.

7.58 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Jordan-messbare Teilmenge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Jordan-messbare Funktion. Weiter sei $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion derart, dass $g|_{M \setminus N} = f|_{M \setminus N}$ für eine Jordan-Nullmenge $N \subseteq M$. Dann ist auch g integrierbar und es gilt $\int_M g(x) dx = \int_M f(x) dx$.

Dies zeigt man wie folgt (wobei der Nachweis in der Vorlesung übersprungen wurde): Da $g = f + (g - f)$, brauchen wir nur die Integrierbarkeit der Funktion $h := g - f$ zeigen und $\int_M h(x) dx = 0$ (siehe 7.56). Hierbei ist $h|_{M \setminus N} = (g - f)|_{M \setminus N} = 0$ und h ist beschränkt:¹³ Es gibt eine reelle Zahl $C \geq 0$ derart, dass $|h(x)| \leq C$ für alle $x \in M$. Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $M \subseteq Q$. Da N eine Jordan-Nullmenge ist, ist die charakteristische Funktion $1_N: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit Integral 0. Also ist auch $C 1_N$ integrierbar mit Integral 0. Das Oberintegral ist somit Null und folglich gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q derart, dass

$$OS_Z(C 1_M) \leq \varepsilon.$$

Aus $0 \leq h_Q \leq C 1_N$ folgt

$$0 \leq US_Z(h_Q) \leq OS_Z(h_Q) \leq OS_Z(C 1_N) \leq \varepsilon,$$

so dass also

$$0 \leq \int_Q^* h_Q(x) dx \leq \int_Q^* h_Q(x) dx \leq OS_Z(h_Q) \leq \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und somit

$$0 = \int_Q^* h_Q(x) dx = \int_Q^* h_Q(x) dx.$$

Es ist also h_Q über Q integrierbar mit $\int_Q h_Q(x) dx = 0$ und somit h über M integrierbar mit $\int_M h(x) dx = \int_Q h_Q(x) dx = 0$. \square

Integrale über Normalbereiche

7.59 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *x-y-Normalbereich*, wenn sie von der Form

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

ist mit reellen Zahlen $a \leq b$ und stetigen Funktionen $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

¹³Es ist $|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, unabhängig von $x \in M$. Wir können also $C := \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ nehmen, die Summe der Supremumsnormen.

Bemerkung 7.60 Jeder x - y -Normalbereich M ist Jordan-messbar, denn der Rand von M ist die Vereinigung der Graphen von g_1 und g_2 sowie der Strecken $\{a\} \times [g_1(a), g_2(a)]$ und $\{b\} \times [g_1(b), g_2(b)]$, welche Jordan-Nullmengen sind.

Jeder x - y -Normalbereich M ist kompakt.

(Er ist beschränkt, weil er in $[a, b] \times [\min g_1([a, b]), \max g_2([a, b])]$ enthalten ist. Er ist zudem in \mathbb{R}^2 abgeschlossen: Ist nämlich eine Folge $(x_k, y_k) \in M$ konvergent gegen ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so folgt $a \leq x \leq b$. Aus $g_1(x_k) \leq y_k \leq g_2(x_k)$ folgt für $k \rightarrow \infty$ weiter

$$g_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_1(x_k) \leq y \leq \lim_{k \rightarrow \infty} g_2(x_k) = g_2(x).$$

7.61 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein x - y -Normalbereich (wie oben), so ist jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Weiter existiert das folgende iterierte Integral und es ist

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (38)$$

Wir wählen einen Quader $Q = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq Q$. Mit Argumenten wie 7.29 und 7.46 kann man zeigen, dass f_Q integrierbar ist. Für festes $x \in [a, b]$ ist $f_Q(x, y) = 0$ wenn $y < g_1(x)$ oder $y > g_2(x)$, somit

$$\int_c^d f_Q(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_Q(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy;$$

letzteres Integral existiert, da $y \mapsto f(x, y)$ auf $[g_1(x), g_2(x)]$ stetig ist. Der Satz von Fubini liefert also

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y) d(x, y) &= \int_Q f_Q(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f_Q(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Beispiel 7.62 Der Viertelkreis aus Beispiel 7.55 ist ein x - y -Normalbereich mit $[a, b] = [0, 1]$ und $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Beispiel 7.63 Die Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq r^2\}$ um den Ursprung mit Radius $r > 0$ ist ein x - y -Normalbereich mit $[a, b] = [-r, r]$ und

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } x \in [-r, r].$$

Beispiel 7.64 Der Achtelkreis

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ist ein x - y -Normalbereich; für $x \in [0, 1]$ ist nämlich $0 \leq y \leq g(x)$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{wenn } x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sqrt{1-x^2} & \text{wenn } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Wir benutzen hierbei, dass $x \mapsto x$ monoton wächst, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ monoton fällt. Die beiden Funktionen sind gleich bei $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; verlangt ist $0 \leq y \leq x$ und $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, also

$$0 \leq y \leq \min\{x, \sqrt{1-x^2}\} = g(x).$$

Wir wollen nun die x -Koordinate \bar{x} des Schwerpunkts von M berechnen. Der Flächeninhalt von M ist ein Achtel des Flächeninhalts der Einheitskreisscheibe, also

$$\text{vol}_2(M) = \frac{\pi}{8}$$

(was wir auch nachrechnen könnten, $\text{vol}_2(M) = \int_M 1 \, d(x, y)$.) Nun ist

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\text{vol}_2(M)} \int_M x \, d(x, y) = \frac{8}{\pi} \int_M x \, d(x, y) = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \int_0^{g(x)} x \, dy \, dx \\ &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} \underbrace{\int_0^x x \, dy}_{[xy]_{y=0}^x} \, dx + \frac{8}{\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy}_{=[xy]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}} \, dx \\ &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2 \, dx + \frac{8}{\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{=\frac{d}{dx}(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2})} \, dx \\ &= \frac{8}{\pi} [x^3/3]_0^{\sqrt{2}/2} + \frac{8}{\pi} [-(1/3)(1-x^2)^{3/2}]_{\sqrt{2}/2}^1 \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}. \end{aligned}$$

7.65 Ein y - x -Normalbereich ist eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form

$$M = \{(x, y) : y \in [a, b], g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

mit reellen Zahlen $a \leq b$ und stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $g_1(y) \leq g_2(y)$ für alle $y \in [a, b]$. Für stetige Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_{y=a}^b \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (39)$$

Beispiel 7.66 Wir wissen schon, dass die Einheitskreischeibe

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ein x - y -Normalbereich ist. Sie ist auch ein y - x -Normalbereich, denn es ist

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Für die stetige Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sin(x e^{y^2})$$

wollen wir nun $\int_M f(x, y) d(x, y)$ berechnen. Betrachtet man M als x - y -Normalbereich, so erhält man

$$\int_M \sin(x e^{y^2}) d(x, y) = \int_{x=-1}^1 \underbrace{\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x e^{y^2}) dy}_{\text{nicht elementar berechenbar}} dx$$

und kommt nicht weiter. Betrachtet man M als y - x -Normalbereich, erhält man

$$\begin{aligned} \int_M \sin(x e^{y^2}) d(x, y) &= \int_{y=-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x e^{y^2}) dx dy \\ &= \int_{y=-1}^1 [-\cos(x e^{y^2})/e^{y^2}]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{y=-1}^1 \underbrace{-\cos(\sqrt{1-y^2} e^{y^2})/e^{y^2} + \cos(-\sqrt{1-y^2} e^{y^2})/e^{y^2}}_{=0} dy = 0; \end{aligned}$$

hierbei wurde benutzt, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, also $\cos(-t) = \cos(t)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 7.67 Manchmal ist eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ also sowohl ein x - y -Normalbereich als auch ein y - x -Normalbereich, aber eine der Integrationsreihenfolgen macht die Rechnung leichter oder erst möglich.

Auch in drei (oder mehr) Dimensionen kann man von Normalbereichen sprechen.

Definition 7.68 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt x - y - z -Normalbereich, wenn M von der Form

$$M = \{(x, y, z) : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

ist mit reellen Zahlen $a \leq b$, stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und stetigen Funktionen

$$h_1, h_2 : N \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem x - y -Normalbereich

$$N := \{(x, y) : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

derart, dass $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ für alle $(x, y) \in N$. Wie im Fall von (x, y) -Normalbereichen sieht man, dass M Jordan-messbar und kompakt ist; weiter ist jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und es ist¹⁴

$$\int_M f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Bemerkung 7.69 Für andere Reihenfolgen der Variablen x, y und z definiert man Normalbereiche entsprechend mit vertauschten Rollen der Variablen.

Bemerkung 7.70 Rekursiv definiert man einen x_1 -, ..., x_n -Normalbereich in \mathbb{R}^n also eine Menge der Form

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in N, h_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h_2(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$

wobei N ein x_1 -, ..., x_{n-1} -Normalbereich in \mathbb{R}^{n-1} ist und $h_1, h_2 : N \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind mit der Eigenschaft, dass

$$h_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq h_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{für all } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in N.$$

¹⁴Da M kompakt ist, ist die stetige Funktion f beschränkt. Als stetige beschränkte Funktion ist f über M integrierbar. Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist die Menge $M_x := \{(y, z) : y \in [g_1(x), g_2(x)], h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$ ein y - z -Normalbereich. Das Integral $\int_{M_x} f(x, y, z) d(y, z)$ existiert also und stimmt mit $\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy$ überein. Der Satz von Fubini ist somit auf $\int_M f(x, y, z) d(x, y, z)$ anwendbar und liefert die Integralformel.

Beispiel 7.71 Jeder Quader $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ in \mathbb{R} (mit reellen Zahlen $a \leq b$, $c \leq d$ und $e \leq f$) ist ein x - y - z -Normalbereich mit $g_1(x) := c$, $g_2(x) := d$, $h_1(x, y) := e$ und $h_2(x, y) := f$.

Beispiel 7.72 Die Einheitskugel $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist ein x - y - z -Normalbereich, denn sie ist die Menge aller $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x \in [-1, 1]$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ und $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Beispiel 7.73 Wir zeigen, dass das Volumen der Einheitskugel $\text{vol}_3(M) = \frac{4}{3}\pi$ ist. Wir fassen hierzu M als x - y - z -Normalbereich auf wie in Beispiel 7.72. Es ist

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(M) &= \int_M 1 \, d(x, y, z) = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dz \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Für festes $x \in [-1, 1]$ liefert die Substitution $y = \sqrt{1-x^2} \sin(u)$, $dy = \sqrt{1-x^2} \cos(u) \, du$ mit $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(M) &= 2 \int_{x=-1}^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 - (1-x^2) \sin^2(u)} \sqrt{1-x^2} \cos(u) \, du \, dx \\ &= 2 \int_{x=-1}^1 \int_{u=-\pi/2}^{\pi/2} (1-x^2) \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u)}_{=\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))} \, du \\ &= \int_{x=-1}^1 (1-x^2) \left[u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi \int_{x=-1}^1 1-x^2 \, dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Zerlegen in Integrale über Normalbereiche

Manche für die Praxis relevante Mengen in der Ebene oder im Raum sind leider keine Normalbereiche. Oft lassen sie sich aber in Normalbereiche zerlegen, die nur in Nullmengen überlappen. Als einen Spezialfall von 7.57 haben wir:

7.74 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^2$ von der Form $M = M_1 \cup \dots \cup M_\ell$ mit Mengen $M_j \subseteq \mathbb{R}^2$, die x - y oder y - x -Normalbereiche sind, und ist $M_j \cap M_k$ eine Jordan-Nullmenge für alle $j \neq k$, so ist für jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{M_j} f(x, y) d(x, y),$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite wie in (38) bzw. (39) berechnet werden können. Analoges gilt in höheren Dimensionen.

Beispiel 7.75 Wir betrachten einen Kreisring

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

in der Ebene mit Innenradius 1 und Außenradius 2. Dieser ist kein Normalbereich (weder ein x - y -Normalbereich noch ein y - x -Normalbereich). Jedoch sind

$$M_1 := \{(x, y) \in M : y \geq 0\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{(x, y) \in M : y \leq 0\}$$

x - y -Normalbereiche mit $M = M_1 \cup M_2$ und es ist

$$M_1 \cap M_2 = ([-2, -1] \cup [1, 2]) \times \{0\}$$

eine Jordan-Nullmenge. Also ist

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_{M_1} f(x, y) d(x, y) + \int_{M_2} f(x, y) d(x, y)$$

für jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und insbesondere

$$\text{vol}_2(M) = \text{vol}_2(M_1) + \text{vol}_2(M_2). \tag{40}$$

Bemerkung 7.76 Wir könnten (40) benutzen zur Berechnung des Flächeninhalts von M . Leichter ist es jedoch, die Kreisscheibe

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

vom Radius 2 zu schreiben als

$$D = M \cup K$$

mit der Kreisscheibe $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ und dem vorigen Kreisring M . Da M und K Jordan-messbare Mengen sind und

$$M \cap K = \mathbb{S}$$

die Einheitskreislinie $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$, die eine Jordan-Nullmenge ist (als Vereinigung zweier Graphen), ist nach 7.57

$$\text{vol}_2(D) = \text{vol}_2(M) + \text{vol}_2(K),$$

also $\pi 2^2 = \text{vol}_2(M) + \pi$ und somit $\text{vol}_2(M) = 3\pi$.

Die Transformationsformel

Aus Mathematik 1 und 2 kennen wir die Substitutionsregel, eines der entscheidenden Hilfsmittel zur Integralberechnung für Funktionen einer reellen Variablen. Wir lernen nun eine Verallgemeinerung für mehrdimensionale Integrale kennen, die sogenannte Transformationsformel. Die Transformationsformel ist von ähnlich großer Nützlichkeit wie der Satz von Fubini.

Wir erinnern an den Begriff der Jacobi-Matrix.

7.77 Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Für $x \in U$ wird die $m \times n$ -Matrix

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* von f an der Stelle x genannt. Dies ist also die Matrix der partiellen Ableitungen der Komponenten von f . Ist $n = m$, so nennen wir $\det J_f(x)$ die *Jacobi-Determinante*.

Eine Grundfassung der Transformationsformel lautet wie folgt:

7.78 (Transformationsformel) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare, injektive Abbildung derart, dass $\det \phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Für jede Jordan-messbare, kompakte Teilmenge $M \subseteq U$ ist dann $\phi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan messbar und für jede stetige Funktion $f: \phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\phi(M)} f(u) du = \int_M f(\phi(x)) |\det J_\phi(x)| dx. \quad (41)$$

Wir substituieren also $u = \phi(x)$ und verfahren nach folgender Merkregel:

7.79 (a) u wird durch $\phi(x)$ ersetzt.

(b) du wird durch $|\det J_\phi(x)|$ ersetzt.

(c) $\phi(M)$ wird durch M ersetzt.

Im Eindimensionalen ist die Transformationsformel eine Umformulierung der Substitutionsregel.

Bemerkung 7.80 Ist $n = 1$, $M = [a, b]$ und ϕ streng monoton wachsend, also $\det J_\phi(x) = \phi'(x) > 0$, so ist $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$ und aus der Transformationsformel wird

$$\int_{[\phi(a), \phi(b)]} f(u) du = \int_{[a, b]} f(\phi(x)) \phi'(x) dx,$$

was sich als die übliche Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx \quad (42)$$

umschreiben lässt. Ist ϕ streng monoton fallend, so ist $\phi([a, b]) = [\phi(b), \phi(a)]$ und $|\det J_\phi(x)| = |\phi'(x)| = -\phi'(x)$, da $\phi'(x) < 0$. Hier lässt sich die Transformationsformel

$$\int_{[\phi(b), \phi(a)]} f(u) du = - \int_{[a, b]} f(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

lesen als

$$\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(u) du = - \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx.$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen im linken Integral liefert ein Minuszeichen, so dass also auch hier (42) gilt.

Beispiel 7.81 Gegeben $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Basis w_1, \dots, w_n des Vektorraums \mathbb{R}^n betrachten wir das Parallelogramm

$$P := \{x + t_1 w_1 + \dots + t_n w_n\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spalten w_1, \dots, w_n . Dann ist die affin-lineare Abbildung

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b$$

stetig differenzierbar (mit $J_\phi(x) = A$) und bijektiv, mit

$$\phi^{-1}(y) = A^{-1}(y - b).$$

Mit dem Würfel $M := [0, 1]^n$ ist $P = \phi(M)$ und nach der Transformationsformel das Volumen des Parallelogramms

$$\text{vol}_n(P) = \int_P 1 \, dy = \int_{\phi(M)} 1 \, dy = \int_M \underbrace{1 \, |\det J_\phi(x)|}_{=|\det A|} \, dx = |\det(A)|. \quad (43)$$

Bemerkung 7.82 In Ebene und Raum haben wir die Formel (43) in der Mathematik 1 kennengelernt mit anschaulicher Begründung. In höheren Dimensionen macht man sich (??) zunächst für Matrizen A klar, die elementaren Zeilenoperationen des Gaußalgorithmus entsprechen. Allgemeine Matrizen sind Produkte von solchen. Man kann die Formel dann benutzen im Beweis der Transformationsformel.

Bemerkung 7.83 Wir können uns die Transformationsformel wie folgt plausibel machen, wenn M ein Quader ist, etwa für $n = 2$. Wir wählen eine Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ von Q . Für ein festes $j \in \{1, \dots, N\}$ sei x_j die linke untere Ecke des Rechtecks Q_j . Dann ist $Q_j - x_j$ ein Rechteck der Form $[0, a] \times [0, b]$. Lassen wir in der linearen Approximation

$$\phi(x) = \phi(x_j) + J_\phi(x_j)(x - x_j) + R(x)$$

das Restglied weg, sehen wir, dass $\phi(Q_j)$ näherungsweise das Parallelogramm

$$P_j := \phi(x_0) + J_\phi(x_j)(Q_j - x_j)$$

ist mit Flächeninhalt $|\det J_\phi(x_j)| ab = |\det J_\phi(x_j)| v_2(Q_j)$. Ist die Zerlegung

fein, ist f auf $\phi(Q_j)$ näherungsweise gleich $f(x_j)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\phi(Q)} f(x) dx &= \sum_{j=1}^N \int_{\phi(Q_j)} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^N \int_{\phi(Q_j)} f(x_j) dx \\ &\approx \sum_{j=1}^N \int_{P_j} f(x_j) dx = \sum_{j=1}^N f(x_j) \text{vol}_2(P_j) \\ &= \sum_{j=1}^N f(x_j) |\det J_\phi(x_j)| v_2(Q_j). \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist eine Riemannsche Summe für das Integral

$$\int_Q f(\phi(x)) |\det J_\phi(x)| dx$$

und konvergiert gegen dieses, wenn die Maschenweite der Zerlegung Z gegen 0 geht.

Möchte man auf Kompaktheit von M verzichten, ist die folgende Variante der Transformationsformel oft nützlich.

7.84 (Transformationsformel) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare, injektive Abbildung derart, dass $\det \phi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Es sei $M \subseteq U$ eine Jordan-messbare Menge derart, dass $\phi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan messbar ist. Weiter sei $f: \phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion und auch $M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\phi(x)) |\det J_\phi(x)|$ beschränkt. Dann gilt*

$$\int_{\phi(M)} f(u) du = \int_M f(\phi(x)) |\det J_\phi(x)| dx. \quad (44)$$

Wichtige Koordinatentransformationen

Ebene Polarkoordinaten. Aus der Mathematik 1 und Mathematik 2 kennen wir Polarkoordinaten: Ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene ist festgelegt, wenn wir seinen Abstand r vom Ursprung O kennen und den Winkel φ , der von der positiven x -Achse und dem Vektor \vec{OP} eingeschlossen wird; es ist dann

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Im Falle $r = 0$ ist φ beliebig.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\phi: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (45)$$

7.85 (Integralberechnung in Polarkoordinaten). *Es sei $M \subseteq [0, \infty[\times [0, 2\pi]$ eine Jordan-messbare Teilmenge, so dass $\phi(M) \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar ist und $f: \phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Dann ist*

$$\int_{\phi(M)} f(x, y) d(x, y) = \int_M f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Bemerkung 7.86 Beim Umschreiben von Integralen in ebenen Polarkoordinaten gehen wir also wie folgt vor:

- (a) Ersetze x durch $r \cos(\varphi)$ und y durch $r \sin(\varphi)$;
- (b) Ersetze den Integrationsbereich $\phi(M)$ für (x, y) durch den Integrationsbereich M für (r, φ) ;
- (c) Ersetze $d(x, y)$ durch $r d(r, \varphi)$ (wichtig: das r vor $d(r, \varphi)$ nicht vergessen!)

Beispiel 7.87 Für den Viertelkreis

$$\widetilde{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

berechne man das Integral $\int_{\widetilde{M}} x d(x, y)$ unter Benutzung von Polarkoordinaten.

Setzen wir $M := [0, 1] \times [0, \pi/2]$, so ist $\widetilde{M} = \phi(M)$ mit ϕ wie in (45), also

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{M}} x d(x, y) &= \int_M r \cos(\varphi) r d(r, \varphi) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \varphi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 [r^2 \sin \varphi]_{\varphi=0}^{\pi/2} = \int_0^1 r^2 dr \\ &= [r^3/3]_{r=0}^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde 7.85 benutzt, dann der Satz von Fubini.

7.88 (Flächeninhalt unter einer Glockenkurve). Wir zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Hierfür ist

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R e^{-x^2} dx}_{=: I_R}$$

zu berechnen. Der Trick ist, zum Quadrat überzugehen und dieses als ein zweidimensionales Integral aufzufassen:

$$\begin{aligned} (I_R)^2 &= I_R \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \int_{-R}^R I_R e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-y^2} dy e^{-x^2} dx = \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-y^2} e^{-x^2} dy dx \\ &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-(x^2+y^2)} dy dx = \int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y). \end{aligned}$$

Es ist also

$$I^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Für die Kreisscheibe $D_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$ gilt

$$[-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}]^2 \subseteq D_R \subseteq [-R, R]^2$$

und somit

$$\int_{[-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \leq \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \leq \int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Da hier die rechte und linke Seite gegen I^2 konvergieren für $R \rightarrow \infty$, gilt dies

auch für die Integrale in der Mitte:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r d(r, \varphi) \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^R \pi e^{-r^2} 2r dr}_{=[-\pi e^{-r^2}]_{r=0}^R} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\pi e^{-R^2} + \pi e^0 = \pi.
 \end{aligned}$$

Also ist $I = \sqrt{\pi}$. Beim zweiten Gleichheitszeichen sind wir hierbei zu zu Polarkoordinaten übergegangen: Um die Punkte der Kreisscheibe B_R zu durchlaufen, wird $r \in [0, R]$ benötigt und $\varphi \in [0, 2\pi]$, es ist also

$$D_R = \phi([0, R] \times [0, 2\pi])$$

mit ϕ wie in (45). Anschließend wurde der Satz von Fubini benutzt.

7.89 Begründung für 7.85. Als Abbildung von $M' :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[\times \{0\})$ ist ϕ bijektiv und zudem stetig differenzierbar mit Jacobi-Matrix

$$J_\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und Jacobi-Determinante $\det J_\phi(r, \varphi) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$. Da M als Jordan-messbare Menge beschränkt ist, ist r beschränkt (etwa durch R) für $(r, \varphi) \in M$ und somit auch $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r$ beschränkt. Es ist $M \setminus M'$ eine Jordan-Nullmenge, denn $M \setminus M'$ ist enthalten in der Vereinigung der drei Jordan-Nullmengen $\{0\} \times [0, 2\pi]$ sowie $[0, R] \times \{0\}$ und $[0, R] \times \{2\pi\}$. Ebenso ist $\phi(M) \setminus \phi(M')$ eine Jordan-Nullmenge als Teilmenge von $[0, R] \times \{0\}$. Unter

Benutzung von 7.84 ist also

$$\begin{aligned}
 \int_{\phi(M)} f(x, y) d(x, y) &= \int_{\phi(M')} f(x, y) d(x, y) \\
 &= \int_{M'} f(\phi(r, \varphi)) |\det J_\phi(r, \varphi)| d(r, \varphi) \\
 &= \int_{M'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \\
 &= \int_M f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r(r, \varphi).
 \end{aligned}$$

7.85 und der Beweis bleiben mit simplen Anpassungen gültig, wenn man $[0, 2\pi]$ durch $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$ ersetzt mit einem beliebigen $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

Zylinderkoordinaten

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ im Raum ist festgelegt durch die Kenntnis der z -Koordinate z und der Projektion (x, y) des Punkts in die x - y -Ebene, die wir in ebenen Polarkoordinaten beschreiben können:

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Man nennt (r, φ, z) die *Zylinderkoordinaten* des Punkts $P = (x, y, z)$. Ist $(x, y) = 0$, so ist wieder φ beliebig.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\phi: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z). \quad (46)$$

7.90(Integralberechnung in Zylinderkoordinaten). *Sei $M \subseteq [0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ eine Jordan-messbare Teilmenge und $\phi(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar. Für jede stetige beschränkte Funktion $f: \phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann*

$$\int_{\phi(M)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_M f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Bemerkung 7.91 Beim Umschreiben von Integralen in Zylinderkoordinaten gehen wir also wie folgt vor:

- (a) Ersetze x durch $r \cos(\varphi)$ und y durch $r \sin(\varphi)$;

- (b) Ersetze den Integrationsbereich $\phi(M)$ für (x, y, z) durch den Integrationsbereiche M für (r, φ, z) ;
- (c) Ersetze $d(x, y, z)$ durch $r d(r, \varphi, z)$ (wichtig: das r vor $d(r, \varphi, z)$ nicht vergessen!)

Beispiel 7.92 Gesucht ist das Volumen der Menge

$$\widetilde{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - x\}.$$

Innerhalb des Zylinders aller (x, y, z) mit $x^2 + y^2 \leq 1$ sind dies die zwischen der x - y -Ebene (mit $z = 0$) und der Ebene $z = 1 - x$ gelegenen Punkte. Für ϕ wie in (46) ist dann

$$\widetilde{M} = \phi(M)$$

mit dem r - φ - z -Normalbereich

$$M = \{(r, \varphi, z) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1 - r \cos \varphi\}.$$

Nach 7.90 ist somit

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(\widetilde{M}) &= \int_{\widetilde{M}} 1 d(x, y, z) \\ &= \int_M 1 r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{1-r \cos \varphi} r dz d\varphi dr \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 - r \cos \varphi) r dr \\ &= \int_{r=0}^1 2\pi r - r^2 \underbrace{[\sin \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}}_{=0} dr \\ &= [\pi r^2]_{r=0}^1 = \pi. \end{aligned}$$

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das Volumen eines Rotationskörpers.

7.93 Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen und $s, t: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen derart, dass

$$0 \leq s(z) \leq t(z) \quad \text{für alle } z \in [a, b].$$

Wir wollen das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers (Drehkörpers)

$$\widetilde{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, s(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq t(z)\}$$

bestimmen, der durch Drehen der in der x - z -Ebene gelegenen Menge

$$\{(x, 0, z) : z \in [a, b], s(z) \leq x \leq t(z)\}$$

um die z -Achse entsteht. Mit ϕ wie in (46) ist

$$\widetilde{M} = \phi(M)$$

mit dem z - φ - r -Normalbereich

$$M := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [a, b] : s(z) \leq r \leq t(z)\}.$$

Nach 7.90 ist also

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(\widetilde{M}) &= \int_{\widetilde{M}} 1 \, d(x, y, z) \\ &= \int_M r \, d(r, \varphi, z) \\ &= \int_{z=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\int_{r=s(z)}^{t(z)} r \, dr \, d\varphi \, dz}_{=[r^2/2]_{r=s(z)}^{t(z)}} \\ &= \int_{z=a}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} (t(z)^2 - s(z)^2)/2 \, d\varphi \, dz \\ &= \pi \int_a^b t(z)^2 - s(z)^2 \, dz. \end{aligned}$$

Das gesuchte Volumen ist somit

$$\text{vol}_3(\widetilde{M}) = \pi \int_a^b t(z)^2 - s(z)^2 \, dz. \quad (47)$$

Ein ausgefüllter Torus (mit der Form eines Donuts) ist ein Spezialfall eines Rotationskörpers.

Beispiel 7.94 Für $0 < r < R$ betrachten wir den Torus \widetilde{M} , der durch Drehen der Kreisscheibe

$$\{(x, 0, z) : (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

um die z -Achse entsteht. Diese lässt sich als z - x -Normalbereich beschreiben:

$$\{(x, 0, z) : z \in [-r, r], s(z) \leq x \leq t(z)\}$$

mit $s(z) := R - \sqrt{r^2 - z^2}$, $t(z) := R + \sqrt{r^2 - z^2}$. Es ist somit \widetilde{M} der Rotationskörper

$$\widetilde{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-r, r] : s(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq t(z)^2\}.$$

Dieser hat nach (47) das Volumen

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(\widetilde{M}) &= \pi \int_{-r}^r t(z)^2 - s(z)^2 dz \\ &= \pi \int_{-r}^r \underbrace{(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2}_{=4R\sqrt{r^2 - z^2}} dz \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz \\ &= 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u}_{=\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u))} du \\ &= 2\pi^2 R r^2, \end{aligned}$$

wobei $z = r \sin u$ mit $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $dz = r \cos u du$ substituiert wurde und dann ausgenutzt, dass $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2u) du = 0$.

Wir geben noch eine Begründung für 7.90.

7.95 Auf der offenen Menge $U :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ ist ϕ injektiv, mit Bild

$$\phi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty[\times \{0\} \times \mathbb{R}).$$

Die Jacobimatrix ist

$$J_\phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\det J_\phi(r, \varphi, z) = r.$$

Es ist

$$[0, \infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \setminus U = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{\pi\} \times \mathbb{R}.$$

Setzen wir $M' := M \cap U$, so ist $M \setminus M'$ die Vereinigung der drei Mengen

$$(M \setminus M') \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2, \quad (M \setminus M') \cap \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad (M \setminus M') \cap \mathbb{R} \times \{\pi\} \times \mathbb{R}.$$

Diese sind beschränkte Teilmengen von Ebenen und somit Jordan-Nullmengen. Weiter ist

$$\phi(M) \setminus \phi(M')$$

eine beschränkte Teilmenge der x - z -Ebene und somit eine Jordan-Nullmenge in \mathbb{R}^3 . Mit (7.84) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\phi(M)} f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\phi(M')} f(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_{M'} f(\phi(r, \varphi, z)) \underbrace{|\det J_\phi(r, \varphi, z)|}_{=r} d(r, \varphi, z) \\ &= \int_M f(\phi(r, \varphi, z)) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_M f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z). \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten).

Wir können einen Punkt $P = (x, y, z)$ im Raum festlegen durch die Kenntnis seines Abstands $r \in [0, \infty[$ zum Ursprung O , den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ zwischen der positiven z -Achse und dem Vektor \vec{OP} (der im Falle $r = 0$ beliebig ist) und den Winkel φ zwischen der positiven x -Achse und \vec{OP}' mit der Projektion $P' := (x, y, 0)$ von O auf die x - y -Ebene (der im Falle $P' = O$ beliebig ist). Da

$$|P'| = r \sin \theta,$$

sind dann also $(r \sin \theta, \varphi)$ die ebenen Polarkoordinaten des Punkts P' in der x - y -Ebene und es ist

$$P = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Man nennt (r, θ, φ) die *Kugelkoordinaten* des Punkts P .

Wir betrachten nun die Abbildung $\phi: [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta). \quad (48)$$

7.96 (Integralberechnung in Kugelkoordinaten). *Sei M eine Jordan-messbare Teilmenge von $[0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und $\phi(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar. Für jede stetige beschränkte Funktion $f: \phi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann*

$$\begin{aligned} \int_{\phi(M)} f(x, y, z) d(x, y, z) \\ = \int_M f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi). \end{aligned}$$

Bemerkung 7.97 Beim Umschreiben von Integralen in Kugelkoordinaten gehen wir also wie folgt vor:

- (a) Ersetze x durch $r \sin \theta \cos(\varphi)$ und y durch $r \sin \theta \sin(\varphi)$; sowie z durch $r \cos \theta$;
- (b) Ersetze den Integrationsbereich $\phi(M)$ für (x, y, z) durch den Integrationsbereiche M für (r, θ, φ) ;
- (c) Ersetze $d(x, y, z)$ durch $r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi)$ (wichtig: das $r^2 \sin \theta$ vor $d(r, \theta, \varphi)$ nicht vergessen!)

Beispiel 7.98 Wir zeigen, dass für jedes $R > 0$ das Volumen der Kugel

$$\widetilde{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

vom Radius R gegeben ist durch

$$\text{vol}_3(\widetilde{M}) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

unter Benutzung von Kugelkoordinaten. Mit ϕ wie in (48) ist

$$\widetilde{M} = \phi([0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]).$$

Mit 7.96 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_3(\widetilde{M}) &= \text{vol}_3(\phi(M)) = \int_{\phi(M)} 1 \, d(x, y, z) \\
 &= \int_M 1 \, r^2 \sin \theta \, d(r, \theta, \varphi) \\
 &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi}_{=2\pi r^2 \sin \theta} \, d\theta \, dr \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R r^2 \underbrace{[-\cos \theta]_{\theta=0}^{\pi}}_{=2} \, dr \\
 &= \left[\frac{4}{3} r^3 \right]_{r=0}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

Wir skizzieren noch die Begründung für 7.96.

7.99 Auf der offenen Menge $U :=]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ ist die Abbildung ϕ aus (48) injektiv mit Bild

$$\phi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty[\times \{0\} \times \mathbb{R}).$$

Sie ist dort zudem stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$J_\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Sarrusschen Regel erhalten wir als Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned}
 \det J_\phi(r, \theta, \varphi) &= 0 + r \cos \theta \cos \varphi r \sin \theta \cos \varphi \cos \theta + r \sin \theta \sin \varphi \sin \theta \sin \varphi r \sin \theta \\
 &\quad + \sin \theta \cos \varphi r \sin \theta \cos \varphi r \sin \theta + 0 + r \sin \theta \sin \varphi r \cos \theta \sin \varphi \cos \theta \\
 &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \\
 &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)) \\
 &= r^2 \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Setzen wir $M' := M \cap U$, so sind $M \setminus M'$ und $\phi(M) \setminus \phi(M')$ Jordan-Nullmengen mit ähnlichen Argumenten wie bei Zylinderkoordinaten. Mit

(7.84) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\phi(M)} f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\phi(M')} f(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_{M'} f(\phi(r, \theta, \varphi)) \underbrace{|\det J_\phi(r, \theta, \varphi)|}_{=r^2 \sin \theta} d(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_M f(\phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_M f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d(r, \theta, \varphi).\end{aligned}$$

8 Kurven, Bogenlänge, Kurvenintegrale

In diesem Kapitel betrachten wir parametrisierte Kurven in \mathbb{R}^n und ordnen ihnen eine Kurvenlänge zu. Anschließend diskutieren wir zwei Arten von Integralen längs Kurven, die z.B. in der Physik wichtig sind. Das Kapitel ist eine gekürzte Fassung von Kapitel 8 der Mathematik 2 (für die meisten Hörerinnen und Hörer also bekannt).

Kurven und Wege

8.1 Eine *stetige Kurve* (oder einfach: Kurve) in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist also

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

mit den stetigen Komponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist jede der Komponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sogar stetig differenzierbar,¹⁵ so nennen wir γ eine *stetig differenzierbare Kurve* (oder kurz: C^1 -Kurve). Kurven mit Definitionsbereich $I = [a, b]$ nennen wir auch *Wege*.

Ist $0 \neq t \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir $\frac{v}{t} := \frac{1}{t}v$.

8.2 Ist $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve, so existiert für jedes $t \in I$ die Ableitung

$$\gamma'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}$$

und stimmt mit der komponentenweisen Ableitung $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ überein.

Beispiel 8.3 Es ist

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), 2 \sin(t))$$

ein C^1 -Weg, der die Ellipse $\{(x, y): x^2 + (y/2)^2 = 1\}$ mit den Halbachsen 1 und 2 durchläuft.

Vektorwertige Integrale und Hauptsatz

¹⁵Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir in der Mathematik 1 *stetig differenzierbar* genannt (kurz: C^1), wenn f differenzierbar (also auch stetig) ist und $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

8.4 Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall,

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige Kurve und $a, b \in I$. Wir definieren das Integral der Funktion γ von a bis b komponentenweise:

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

8.5 (Eigenschaften vektorwertiger Integrale). *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $\gamma, \eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Kurven. Dann gilt:*

- (a) *Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist $r\gamma + s\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und für alle $a, b \in I$ ist*

$$\int_a^b (r\gamma(t) + s\eta(t)) dt = r \int_a^b \gamma(t) dt + s \int_a^b \eta(t) dt.$$

- (b) (Intervalladditivität). *Für alle $a, b, c \in I$ ist*

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \int_a^c \gamma(t) dt + \int_c^b \gamma(t) dt. \quad (49)$$

- (c) (Integralabschätzungen). *Für $a \leq b$ in I gilt*

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt \leq \|\gamma\|_\infty (b - a) \quad (50)$$

mit der "Supremumsnorm" $\|\gamma\|_\infty := \sup\{|\gamma(t)| : t \in [a, b]\}$.

Nachweis (siehe Mathematik 2): (a) und (b) sind uns für reellwertige Funktionen bekannt. Im vektorwertigen Fall können wir (a) und (b) komponentenweise nachprüfen.

Zum Nachweis von (c) machen wir uns zunächst klar, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$

$$|v| = \frac{v}{|v|} \cdot v \quad (51)$$

gilt, weil $|v| = \frac{1}{|v|}|v|^2 = \frac{1}{|v|}(v \cdot v) = \frac{v}{|v|} \cdot v$. Zum Beweis von (c) sei

$$v := \int_a^b \gamma(t) dt,$$

also $v = (v_1, \dots, v_n)$ mit $v_j = \int_a^b \gamma_j(t) dt$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Ist $v = 0$, sind die Abschätzungen in (c) trivial. Ist $v \neq 0$, erhalten wir mit $\frac{v}{|v|} = \left(\frac{v_1}{|v|}, \dots, \frac{v_n}{|v|}\right)$

$$\begin{aligned} |v| &= \frac{v}{|v|} \cdot v = \sum_{j=1}^n \frac{v_j}{|v|} \int_a^b \gamma_j(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{v_j}{|v|} \gamma_j(t) dt = \int_a^b \frac{v}{|v|} \cdot \gamma(t) dt \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{v}{|v|} \cdot \gamma(t) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\left| \frac{v}{|v|} \right|}_{=1} |\gamma(t)| dt = \int_a^b |\gamma(t)| dt, \end{aligned}$$

wobei beim Übergang zur letzten Zeile die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt wurde. Da $|\gamma(t)| \leq \|\gamma\|_\infty$ für alle $t \in [a, b]$, können wir das letzte Integral (wegen der Monotonie des Integrals) durch $\int_a^b \|\gamma\|_\infty dt = \|\gamma\|_\infty(b-a)$ weiter nach oben abschätzen.

Die folgende Fassung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann man komponentenweise nachrechnen.

8.6 Für jede C^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Weglänge

8.7 Wir definieren die *Weglänge* eines C^1 -Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \tag{52}$$

Die Weglänge wird auch *Bogenlänge* genannt oder *Kurvenlänge*. Im entarteten Fall eines Intervalls $[a, a] = \{a\}$ setzen wir $L(\gamma) := 0$ für Funktionen $\gamma: [a, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beispiel 8.8 Für $\alpha \in]0, 2\pi[$ durchläuft der Weg

$$\gamma: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

einmal im Gegenuhrzeigersinn den Kreisbogen des Einheitskreises von $(1, 0)$ aus bis $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Da $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ für alle $t \in [0, \alpha]$ mit

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1,$$

ist die Weglänge des Kreisbogens

$$L(\gamma) = \int_0^\alpha |\gamma'(t)| dt = \int_0^\alpha 1 dt = \alpha.$$

Beispiel 8.9 Gegeben $v, w \in \mathbb{R}^n$ parametrisieren wir die Verbindungsstrecke von $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $w = (w_1, \dots, w_n)$ durch den Weg

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto v + t(w - v) = (v_1 + t(w_1 - v_1), \dots, v_n + t(w_n - v_n)).$$

Dann ist $\gamma'(t) = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n) = w - v$ für alle $t \in [0, 1]$ und somit

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |w - v| dt = |w - v|.$$

Die Länge der Verbindungsstrecke stimmt also mit dem Abstand der Punkte v und w überein.

8.10 Machen wir uns noch plausibel, warum sich das Integral $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ wirklich anschaulich als Länge des Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ interpretieren lässt.

Wir unterteilen das Intervall in Teilintervalle mit Zerlegungspunkten

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b.$$

Sind die Abstände $t_j - t_{j-1}$ sehr klein, können wir γ auf $[t_{j-1}, t_j]$ kaum von der Verbindungsstrecke von $\gamma(t_{j-1})$ und $\gamma(t_j)$ unterscheiden. Die Weglänge von $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ sollte also etwa

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

sein. Hierbei ist nach dem Hauptsatz

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt$$

und dies ist näherungsweise $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_{j-1}) dt = (t_j - t_{j-1})\gamma'(t_{j-1})$, da γ' stetig ist und sich $\gamma'(t)$ für $t \in [t_{j-1}, t_j]$ kaum von $\gamma'(t_{j-1})$ unterscheidet. Also ist näherungsweise

$$L(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}) \approx (t_j - t_{j-1})|\gamma'(t_{j-1})|$$

und somit näherungsweise

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^m L(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}) \approx \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1})|\gamma'(t_{j-1})|. \quad (53)$$

Der gemachte Fehler sollte umso kleiner sein, je feiner die gewählte Zerlegung ist. Nun steht aber auf der rechten Seite von (53) eine Riemannsches Summe, wie wir sie zur Definition von Riemann-Integralen benutzt haben. Betrachten wir eine Folge von Zerlegungen, deren Maschenweite gegen 0 geht, konvergieren die Riemanschen Summen gegen das Integral $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Der Grenzübergang in (53) führt also auf (52).

Umparametrisieren von Wegen

Beim Umparametrisieren ändert sich die Länge von Wegen nicht:

8.11 Ist $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus (also bijektiv mit ϕ und ϕ^{-1} stetig differenzierbar), so ist

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi)$$

für jeden C^1 -Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dies ist ein Spezialfall von 8.14 (angewandt mit der konstanten Funktion $f = 1$) und wird vorher nicht benutzt.

Wegintegrale erster Art.

8.12 (Wegintegrale erster Art). Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Weg und

$$f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig, so definieren wir¹⁶

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Beispiel 8.13 Die Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschreibe einen Draht im Raum, welcher an der Stelle $\gamma(t) = x$ die Massendichte $\rho(x) \geq 0$ besitzt (im Sinne von Masse pro Weglänge).¹⁷ Dann ist

$$m = \int_{\gamma} \rho ds$$

die Masse des Drahts. Ist $m > 0$, so definiert man seinen Schwerpunkt als

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

mit

$$\bar{x}_k = \frac{1}{m} \int_{\gamma} \rho \operatorname{pr}_k ds = \frac{1}{m} \int_a^b \rho(\gamma(t)) \gamma_k(t) |\gamma'(t)| dt$$

für $k \in \{1, 2, 3\}$. Ist ρ konstant, so ist $m = \rho \cdot L(\gamma)$ und

$$\bar{x}_k = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b \gamma_k(t) |\gamma'(t)| dt.$$

8.14 Wegintegrale 1. Art sind invariant unter Umparametrisierungen:

Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Weg, $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (wie in 8.12) und $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus, so ist

$$\int_{\gamma \circ \phi} f = \int_{\gamma} f.$$

¹⁶Wir benutzen die selbe Notation auch, wenn f auf einer größeren Teilmenge von \mathbb{R}^n (z.B. auf ganz \mathbb{R}^n) definiert ist.

¹⁷Ist der Draht an verschiedenen Stellen unterschiedlich gezogen worden oder verrostet, braucht ρ nicht konstant sein.

Schreiben wir $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, so hat nämlich $\gamma \circ \phi = (\gamma_1 \circ \phi, \dots, \gamma_n \circ \phi)$ nach der Kettenregel die Ableitung

$$(\gamma \circ \phi)'(t) = (\gamma'_1(\phi(t))\phi'(t), \dots, \gamma'_n(\phi(t))\phi'(t)) = \phi'(t)\gamma'(\phi(t)). \quad (54)$$

Also ist

$$|(\gamma \circ \phi)'(t)| = |\phi'(t)| |\gamma'(\phi(t))|.$$

Erster Fall: Ist ϕ orientierungserhaltend, also streng monoton wachsend, so ist $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [c, d]$. Wir können die Betragsstriche weglassen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t))) |(\gamma \circ \phi)'(t)| dt = \int_c^d f(\gamma(\phi(t))) |\gamma'(\phi(t))| \phi'(t) dt \\ &= \int_a^b |f(\gamma(u))| |\gamma'(u)| du = \int_{\gamma} f \end{aligned}$$

mit der Substitution $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t) dt$, $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$. Ist ϕ orientierungsumkehrend, so ist ϕ streng monoton fallend und $\phi'(t) < 0$ für alle $t \in [c, d]$, also $|\phi'(t)| = -\phi'(t)$. Die Substitution $u = \phi(t)$ mit $\phi(c) = b$, $\phi(d) = a$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t))) |(\gamma \circ \phi)'(t)| dt = - \int_c^d f(\gamma(\phi(t))) |\gamma'(\phi(t))| \phi'(t) dt \\ &= - \int_b^a f(\gamma(u)) |\gamma'(u)| du = \int_a^b |f(\gamma(u))| |\gamma'(u)| du. \end{aligned}$$

Wegintegrale zweiter Art

8.15 (Wegintegrale zweiter Art). Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Weg und

$$F: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig,¹⁸ so definieren wir

$$\int_{\gamma} \langle F, d\vec{s} \rangle := \int_{\gamma} F \cdot d\vec{s} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

¹⁸Wir benutzen die selbe Notation auch, wenn F auf einer größeren Teilmenge von \mathbb{R}^n (z.B. auf ganz \mathbb{R}^n) definiert ist.

unter Benutzung des Skalarprodukts

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ in \mathbb{R}^n . Statt $d\vec{s}$ schreiben wir auch ds .

Beispiel 8.16 Es sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Kraftfeld, also $F(x) \in \mathbb{R}^3$ ein Kraftvektor, der an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ auf ein Teilchen wirkt. Sei $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position des Teilchens zur Zeit t . Die bei der Bewegung des Teilchens längs einer C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ geleistete Arbeit ist dann

$$E = - \int_{\gamma} F \cdot d\vec{s}.$$

8.17 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Weg und $F: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Ist ϕ orientierungserhaltend (also streng monoton wachsend), so ist

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma \circ \phi} F \cdot d\vec{s}.$$

Ist ϕ orientierungsumkehrend (also streng monoton fallend), so ist

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma \circ \phi} F \cdot d\vec{s}.$$

Nachweis: Ist ϕ streng monoton wachsend, so ist überall $\phi'(t) > 0$. Weiter ist $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ und die Substitution $u = \phi(t)$ liefert

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \phi} \langle F, d\vec{s} \rangle &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\phi'(t) \rangle dt \\ &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t)) \rangle \phi'(t) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du \\ &= \int_{\gamma} \langle F, d\vec{s} \rangle. \end{aligned}$$

Ist γ streng monoton fallend, so ist überall $\gamma'(t) < 0$, weiter $\gamma(c) = b$ und $\gamma(d) = a$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \phi} \langle F, d\vec{s} \rangle &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t))\phi'(t) \rangle dt \\ &= \int_c^d \langle F(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\phi(t)) \rangle \phi'(t) dt \\ &= \int_b^a \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du = - \int_a^b \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du \\ &= - \int_{\gamma} \langle F, d\vec{s} \rangle. \end{aligned}$$

8.18 Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar* (kurz: *stückweise C^1*), wenn es einer Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

des Intervalls $[a, b]$ derart gibt, dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ die Einschränkung

$$\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein C^1 -Weg ist.

Beispiel 8.19 Zum Beispiel ist

$$\gamma: [0, 2 + \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t - 1, 0) & \text{wenn } t \in [0, 2] \\ (\cos(t - 2), \sin(t - 2)) & \text{wenn } t \in [2, 2 + \pi] \end{cases}$$

ein stückweiser C^1 -Weg zur Zerlegung $t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 2 + \pi$. Dieser läuft geradlinig von $(-1, 0)$ nach $(1, 0)$, dann durchläuft er den oberen Halbkreis im Gegenuhrzeigersinn von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$.

Beispiel 8.20 Ein (parametrisierter) *Polygonzug* ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

des Intervalls auf jedem der Intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ affin-linear ist. Für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ist also

$$\gamma(t) = \gamma(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})).$$

Jeder Polygonzug ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg.

8.21 Sind ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und die Zerlegung $a = t_0 < \dots < t_m = b$ wie in 8.18, so definieren wir die *Bogenlänge* von γ als Summe der Bogenlängen der beteiligten stetig differenzierbaren Teilwege:

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^m L(\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}).$$

Ist $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir

$$\int_{\gamma} f \, ds := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} f \, ds = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

Ist $F: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so definieren wir

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{s} := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} F \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

9 Existenz von Potentialfunktionen

Für die Physik und weitere Anwendungen ist es wichtig, diejenigen Vektorfelder erkennen zu können, die Gradient einer skalarwertigen Funktion sind. Dieser Frage gehen wir nun nach.

Zunächst wiederholen wir Kapitel 12 der Mathematik 2, in dem die Fragestellung schon angerissen wurde. Anschließend betrachten wir zwei ergänzende Resultate (9.19 und 9.20).

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, so ist der Gradient

$$\nabla\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \right)$$

ein stetiges Vektorfeld auf U .

Beispiel 9.1 Für $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$ ist

$$\nabla\phi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2 \right).$$

Definition 9.2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Eine C^1 -Funktion $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ wird eine *Potentialfunktion* für F genannt, wenn

$$F = \nabla\phi,$$

also $F_j = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Wozu sind Potentialfunktionen gut? Zum Beispiel ermöglichen sie uns, Wegintegrale zweiter Art sehr einfach auszurechnen:

9.3 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Potentialfunktion für das stetige Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) \quad (55)$$

für jeden C^1 -Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$.

In der Tat ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot ds &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\
 &= \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\
 &= \int_a^b (\phi \circ \gamma)'(t) dt = [\phi(\gamma(t))]_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a));
 \end{aligned}$$

hierbei wurde beim Übergang zur letzten Zeile die Kettenregel benutzt, dann der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Beispiel 9.4 Für das Vektorfeld $F = \nabla \phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 9.1 und

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\cos(t), \sin(t))$$

ist

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \phi(1, 0) - \phi(-1, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Bemerkung 9.5 Formel (55) gilt ebenso, wenn $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ lediglich *stückweise* stetig differenzierbar ist.

Sei nämlich $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ derart, dass der Teilweg $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist für all $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot ds &= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} F \cdot ds = \sum_{j=1}^m (\phi(\gamma(t_j)) - \phi(\gamma(t_{j-1}))) \\
 &= \phi(\gamma(t_m)) - \phi(\gamma(t_0)) = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a));
 \end{aligned}$$

beim Übergang zur letzten Zeile wurde benutzt, dass eine “Teleskopsumme” vorliegt, in der Summanden mit positivem und negativem Vorzeichen vorkommen und sich auslöschen.

Bemerkung 9.6 Hat ein Vektorfeld F eine Potentialfunktion ϕ , so hängen Wegintegrale $\int_{\gamma} F \cdot ds$ nach (55) nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges

ab, nicht vom Verlauf des Weges dazwischen. Insbesondere ist für jeden (stückweise) stetig differenzierbaren *geschlossenen* Weg¹⁹ $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ also

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = 0.$$

Anwender schreiben für Wegintegrale über geschlossene Integrationswege gern $\oint_{\gamma} F \cdot ds$. In dieser Notation haben wir also stets $\oint_{\gamma} F \cdot ds = 0$, wenn F eine Potentialfunktion besitzt.

Beispiel 9.7 Ist $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld und $F(x_1, x_2, x_3)$ die Kraft, die auf einen Körper an der Stelle (x_1, x_2, x_3) wirkt, so ist die beim Bewegen des Körpers von $\gamma(a) \in \mathbb{R}^3$ nach $\gamma(b) \in \mathbb{R}^3$ längs eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ geleistete Arbeit

$$W = - \int_{\gamma} F \cdot ds.$$

Besitzt F eine Potentialfunktion ϕ , so hängt die geleistete Arbeit also nur vom Anfangspunkt und Endpunkt, nicht vom Weg zwischen den Endpositionen ab.

Wann hat ein Vektorfeld eine Potentialfunktion? Eine einfache notwendige Bedingung gibt es für stetig differenzierbare Vektorfelder.

Definition 9.8 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbares Vektorfeld*, wenn seine Komponenten $F_1, \dots, F_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

9.9 (Integrabilitätsbedingung). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Hat F eine Potentialfunktion, so gilt

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

In der Tat: Ist $F = \nabla \phi$ mit einer C^1 -Funktion ϕ , so ist $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = F_j$ stetig differenzierbar für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und somit ϕ eine C^2 -Funktion. Nach dem Satz von Schwarz gilt somit

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

¹⁹Ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ heißt geschlossen, wenn sein Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Beispiel 9.10 Hat das Vektorfeld $F = (F_1, F_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$ eine Potentialfunktion?

Das Vektorfeld ist stetig differenzierbar. Da

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2) = -1$$

nicht mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) = 1$$

übereinstimmt, ist die Integrabilitätsbedingung verletzt. Also kann F keine Potentialfunktion haben.

Beispiel 9.11 Hat das Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\sin y, 1 + x \cos y)$$

eine Potentialfunktion?

Das Vektorfeld ist stetig differenzierbar. Da

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos(y) = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Es spricht also nichts gegen die Existenz einer Potentialfunktion und in der Tat können wir eine solche konstruieren mit der *Methode des sukzessiven Integrierens*.

Wir starten hierzu mit einer C^1 -Funktion $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Genau dann gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = \sin y$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wenn für jedes feste $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \sin y$$

erfüllt ist, also

$$\phi(x, y) = x \sin y + C(y) \tag{56}$$

ist mit einem $C(y) \in \mathbb{R}$. Hierbei wurde y festgehalten und auf die so erhaltene Funktion von x der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewandt. Dann ist

$$C(y) = \phi(x, y) - x \sin y$$

eine C^1 -Funktion. Aus (56) folgt

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = x \cos y + C'(y).$$

Also gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = 1 + x \cos y$$

genau dann, wenn

$$C'(y) = 1,$$

also $C(y) = y + K$ mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$. Also liefert

$$\phi(x, y) = x \sin y + y + K$$

eine Potentialfunktion für F .

Das beschriebene Vorgehen funktioniert stets für C^1 -Vektorfelder auf \mathbb{R}^n oder auf einem offenen Quader $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$, welche die Integrabilitätsbedingung erfüllen.²⁰ Somit:

9.12 Ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$F = (F_1, \dots, F_n):]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

hat genau dann eine Potentialfunktion, wenn F die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Im Falle von Vektorfeldern auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt es weitere nützliche Notationen.

Definition 9.13 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und

$$F = (F_1, F_2, F_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die *Rotation* von F als das stetige Vektorfeld

$$\operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

²⁰Für jedes j ist auch $a_j = -\infty$ bzw. $b_j = \infty$ erlaubt.

Eine andere Notation für $\operatorname{rot}(F)$ ist $\nabla \times F$, denn formal gerechnet liefert das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

die Rotation (wenn man den Operator immer vor die Funktion stellt). Im Englischen nennt man die Rotation “curl” und schreibt auch $\operatorname{curl}(F)$.

Beispiel 9.14 Für das Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 x_3, \cos(x_1))$$

ist mit $x := (x_1, x_2, x_3)$

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{pmatrix} 0 - x_1 \\ 0 + \sin(x_1) \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

9.15 Ein C^1 -Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ erfüllt offenbar genau dann die Integrabilitätsbedingung aus 9.9, wenn $\operatorname{rot} F = 0$.

9.16 Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn ein $z \in U$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von z und x in U enthalten ist, also $z + t(x - z) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$.

9.17 Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in U$ ihre Verbindungsstrecke in U enthalten ist, also $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$.

Offenbar ist jede konvexe, nicht leere Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex: Jedes $z \in U$ erfüllt dann die in 9.16 geforderte Bedingung.

Beispiel 9.18 In \mathbb{R}^n ist für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ die offene Kugel $B_r(z) := \{y \in \mathbb{R}^n: |y - z| < r\}$ konvex. Seien nämlich $x, y \in B_r(z)$ und $t \in [0, 1]$. Ist $t = 0$, so ist $x + t(y - x) = x \in B_r(z)$. Ist $t = 1$, so ist $x + t(y - x) = y \in B_r(z)$. Ist $t \in]0, 1[$, so ist

$$\begin{aligned} |x + t(y - x) - z| &= |ty + (1 - t)x - z| = |ty + (1 - t)x + tz + (1 - t)z| \\ &\leq t|y - z| + (1 - t)|x - z| < tr + (1 - t)r = r, \end{aligned}$$

also $x + t(y - x) \in B_r(z)$.

Im folgenden Beweis schreiben wir kurz D_j statt $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

9.19 (Potentialfunktionen auf sternförmigen Mengen) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, so erfüllt ein C^1 -Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann die Integrabilitätsbedingung, wenn F eine Potentialfunktion besitzt.

Beweis. Wir wissen schon, dass die Integrabilitätsbedingung notwendig ist für die Existenz einer Potentialfunktion. Da U sternförmig angenommen ist, ist sie auch hinreichend. Erfülle nämlich F die Integrabilitätsbedingung. Es sei $z \in U$ ein Punkt derart, dass $\gamma_x(t) := z + t(x - z) \in U$ für alle $x \in U$ und alle $t \in [0, 1]$. dann ist γ_x ein C^1 -Weg von z nach x in U , mit $\gamma'_x(t) = x - z$. Wir definieren mit selbigem

$$\phi(x) := \int_{\gamma_x} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle F(z+t(x-z)), x-z \rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(z+t(x-z))(x_j-z_j) dt.$$

Da der Integrand eine C^1 -Funktion von (z, t) ist, ist ϕ stetig differenzierbar und wir können die partiellen Ableitungen ins Integral ziehen.²¹ Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (F_j(z+t(x-z))(x_j-z_j)) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n (t(D_i F_j)(z+t(x-z))(x_j-z_j) + F_j(z+t(x-z)) \underbrace{\frac{\partial(x_j-z_j)}{\partial x_i}}_{=\delta_{ij}}) dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{F_i(z+t(x-z)) + t \sum_{j=1}^n (D_j F_i)(z+t(x-z))(x_j-z_j)}_{=\frac{\partial}{\partial x_i}(tF_i(z+t(x-z)))} dt \\ &= [tF_i(z+t(x-z))]_{t=0}^{t=1} = F_i(x), \end{aligned}$$

wie benötigt. Beachten Sie, dass für das dritte Gleichheitszeichen die Integrabilitätsbedingung $D_i F_j = D_j F_i$ benutzt wurde.

9.20 (Hauptsatz über Gradientenfelder). Für ein stetiges Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen, nicht-leeren Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

²¹Dies folgt aus dem Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale, 11.19 im Mathematik 2-Skript, und der Stetigkeit parameterabhängiger Integrale in der dortigen Bemerkung 11.18.

(a) F ist ein Gradientenvektorfeld, d.h. es gibt eine C^1 -Funktion $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\phi$.

(b) Alle Wegintegrale über F längs geschlossenen Wegen verschwinden. Genauer: Für jeden Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$, der geschlossen und stückweise C^1 ist, gilt

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = 0.$$

(c) Wegintegrale über F hängen nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Genauer: Sind $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ and $\eta: [c, d] \rightarrow U$ stückweise C^1 -Wege mit $\gamma(a) = \eta(c)$ und $\gamma(b) = \eta(d)$, so ist

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_{\eta} \langle F, ds \rangle.$$

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Ist $F = \nabla\phi$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg, der stückweise C^1 ist, so ist $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = 0$ nach Bemerkung 9.6.

(b) \Rightarrow (c) Sind γ und η wie in (b) beschrieben, so erhalten wir einen geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg θ , indem wir zuerst γ durchlaufen und dann η rückwärts. In Formeln definieren wir den Weg $\theta: [a, b+d-c] \rightarrow U$ via

$$\theta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn } t \in [a, b]; \\ \eta(d - (t - b)) & \text{wenn } t \in [b, b + (d - c)]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$0 = \int_{\theta} \langle F, ds \rangle = \int_{\theta|_{[a, b]}} \langle F, ds \rangle + \int_{\theta|_{[b, b+(d-c)]}} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma} \langle F, ds \rangle - \int_{\eta} \langle F, ds \rangle,$$

wobei für die letzte Gleichheit Satz 8.17 benutzt wurde. Die zwei fraglichen Wegintegrale sind also gleich.

(c) \Rightarrow (a). Wir nehmen für den Nachweis an, dass sich je zwei Punkte in U durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden lassen. Man kann zeigen, dass sich der allgemeine Fall auf diese Situation zurückführen lässt. Ist U konvex oder sternförmig, so ist die Bedingung erfüllt.

Wir halten einen Punkt $z \in U$ fest und definieren

$$\phi(x) := \int_{\gamma_x} \langle F, ds \rangle,$$

wobei γ_x ein Weg von z nach x in U ist. Wir zeigen nun, dass $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert und mit F_i übereinstimmt (insb. also stetig ist). Dann ist ϕ eine C^1 -Funktion und nach dem Vorigen ist $\nabla \phi = F$. Gegeben i wie zuvor und $x \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$y(t) := x + te_i \in U \quad \text{für alle } t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Sei $\gamma_x: [a, b] \rightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg von z nach x . Für jedes t wie zuvor ist dann

$$\gamma_{y(t)}: [a, b+1] \rightarrow U, \quad \theta \mapsto \begin{cases} \gamma_x(\theta) & \text{wenn } \theta \in [a, b]; \\ x + (\theta - b)te_i & \text{wenn } \theta \in [b, b+1] \end{cases}$$

ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in U von z nach $y(t) = x + te_i$ und somit

$$\begin{aligned} \phi(x + te_i) &= \int_{\gamma_{y(t)}} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_x} \langle F, ds \rangle + \int_b^{b+1} \langle F(x + (\theta - b)te_i), te_i \rangle d\theta \\ &= \phi(x) + t \underbrace{\int_0^1 F_i(x + \tau te_i) d\tau}_{=: h(t)}, \end{aligned}$$

wobei $\tau := \theta - b$ substituiert wurde. Für t wie zuvor mit $t \neq 0$ ist also

$$\frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = h(t),$$

wobei $h: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale (siehe 11.17 in der Mathematik 2) stetig ist, so dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + te_i) - \phi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = h(0) = \int_0^1 F_i(x + \tau 0e_i) d\tau = F_i(x)$$

folgt.

10 Flächen im Raum, Flächeninhalt und Integrale über Flächen

In diesem Kapitel betrachten wir parametrisierte Flächenstücke und zusammengesetzte Flächen, die aus endlich vielen parametrisierten Flächenstücken aufgebaut sind. Wir weisen solchen Flächen einen Flächeninhalt zu und betrachten Integrale über solche Flächen, sowohl für skalarwertige Integranden (Flächenintegrale erster Art) als auch für vektorwertige Funktionen (Flächenintegrale zweiter Art, Flussintegrale).

Parametrisierte Flächenstücke

In der Mathematik 2 und 3 haben wir wiederholt mit einem stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gearbeitet und nicht einfach mit seinem Bild $\gamma([a, b])$ (einer eindimensionalen Teilmenge des Raums). Ganz ähnlich ist es sinnvoll zur Beschreibung zweidimensionaler Objekte, geeignete Abbildungen

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ als Flächen zu betrachten, nicht nur die Teilmenge $f(D)$ von \mathbb{R}^3 . Die Parametrisierung f der Menge $f(D)$ soll also zunächst fest vorgegeben sein.

Die Definitionsbereiche D dürfen nicht zu kompliziert sein.

10.1 Wir verlangen stets, dass der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt ist (also beschränkt und abgeschlossen) und D gleich dem Abschluss seines Inneren D^0 ist, also

$$D = \overline{D^0}.$$

Weiter verlangen wir, dass der Rand ∂D eine Jordan-Nullmenge von \mathbb{R}^2 ist.

Bemerkung 10.2 (a) Das Innere D^0 ist die Menge aller $z \in D$, so dass eine ganze Kreisscheibe mit Mittelpunkt z in D enthalten ist (siehe Definition 7.49 (c) im Mathematik 2-Skript).

(b) Die Bedingung $D = \overline{D^0}$ bedeutet, dass für jedes $z \in D$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $w \in D^0$ existiert mit $|z - w| < \varepsilon$ (vgl. Definition 7.49 (b) und Bemerkung 7.51 (b) aus der Mathematik 2).

- (c) Da D abgeschlossen ist, ist $\partial D = D \setminus D^0$ (vgl. Bemerkung 7.52 (c) aus der Mathematik 2). Es besteht ∂D also aus allen $z \in D$, die nicht im Inneren von D sind.

Beispiel 10.3 Ein Normalbereich $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ mit $a < b$ erfüllt die in 10.1 formulierten Bedingungen, wenn $g_1(x) < g_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$ (oder bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen). Es ist dann

$$D^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, b[, g_1(x) < y < g_2(x)\}$$

und ∂D die Vereinigung der Mengen $\{a\} \times [g_1(a), g_2(a)]$, $\{b\} \times [g_1(b), g_2(b)]$ und der endlichen Menge $\{(x, g_1(x)) : x \in [a, b] \text{ mit } g_1(x) = g_2(x)\}$.

10.4 Für D wie zuvor nennen wir eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ *stetig differenzierbar*, wenn $f = g|_D$ für eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $D \subseteq U$. Wir schreiben $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial g}{\partial x}|_D$ und $\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial g}{\partial y}|_D$.

10.5 Ein *parametrisiertes Flächenstück* in \mathbb{R}^3 ist eine stetig differenzierbare Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit D wie in 10.1 derart, dass $f|_{D^0}$ injektiv ist und für alle $z = (x, y) \in D^0$ die Vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

linear unabhängig sind. Wir nennen $f(D)$ das zugehörige *Flächenstück* und f eine *Parametrisierung*.

Beispiel 10.6 Für jede Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in 10.1 und stetig differenzierbare Abbildung $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph

$$\text{graph}(h) = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

ein Flächenstück mit Parametrisierung

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, h(x, y)).$$

Die Funktion f ist sogar auf ganz D injektiv (da wir (x, y) durch Weglassen der dritten Komponente aus $(x, y, h(x, y))$ zurückgewinnen können). Weiter sind die Vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)$$

sogar für alle $(x, y) \in D$ linear unabhängig, denn ihr Vektorprodukt (wenn man sie als Spaltenvektoren betrachtet) ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

und somit nicht der Nullvektor.

Beispiel 10.7 Für jedes $r > 0$ ist die Sphäre

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ein Flächenstück mit der Parametrisierung $f: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (58)$$

(die wir erhalten, wenn wir in Kugelkoordinaten den Radius r festhalten).

In der Tat ist f auf dem Inneren $]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ injektiv. Weiter ist f stetig differenzierbar (die gleiche Formel liefert ja eine C^1 -Funktion für $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$) mit

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{pmatrix} \\ &= r^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

Für (θ, φ) im Inneren $]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ ist dieses Vektorprodukt nicht der Nullvektor, die partiellen Ableitungen also linear unabhängig.

Flächeninhalte und Flächenintegrale erster Art

10.8 Der Flächeninhalt eines parametrisierten Flächenstücks $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert als die nicht-negative Zahl

$$A := \int_D \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Beispiel 10.9 Der Flächeninhalt einer Kugel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = r^2\}$$

von Radius $r > 0$ ist

$$A = 4\pi r^2.$$

Mit f wie in Beispiel 10.7 ist unter Benutzung von (59) nämlich

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right| = r^2 \sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = r^2 \sin \theta, \quad (60)$$

also

$$\begin{aligned} A &= \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right| \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 [-\cos \theta]_{\theta=0}^\pi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Bemerkung 10.10 Wir wollen uns klarmachen, wie man auf die Formel für den Flächeninhalt kommt, im Falle eines (achsenparallelen) Rechtecks D . Hierzu betrachten wir eine Zerlegung von D in Rechtecke Q_1, \dots, Q_N . Sei (x_j, y_j) die linke untere Ecke von Q_j und

$$Q_j = [x_j + \Delta x] \times [y_j + \Delta y].$$

Vernachlässigen wir in der linearen Approximation

$$f(x, y) = f(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j)(x - x_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j)(y - y_j) + R(x, y)$$

das Restglied, so sehen wir, dass $f(Q_j)$ näherungsweise das Parallelogramm mit den Ecken

$$f(x_j, y_j), \quad f(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j)\Delta x, \quad f(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j)\Delta y \quad (61)$$

und

$$f(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j)\Delta y \quad (62)$$

ist. Nach den Überlegungen zu Beginn der Mathematik 1 ist dessen Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j)\Delta x \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j)\Delta y \right| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right| \Delta x \Delta y \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right| v_2(Q_j). \end{aligned}$$

Summation über $j \in \{1, \dots, N\}$ zeigt, dass anschaulich

$$A \approx \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right| v_2(Q_j)$$

ist. Nun ist aber die rechte Seite eine Riemannsche Summe für das Integral $\int_D \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y)$ und konvergiert gegen letzteres, wenn die Maschenweite der Zerlegung gegen 0 geht.

10.11 (Flächenintegrale erster Art). Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $\rho: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das Integral von ρ über das Flächenstück ist definiert als

$$\int_{f(D)} \rho dS := \int_D \rho(f(x, y)) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Bemerkung 10.12 (a) Wir schreiben auch $\int_{f(D)} \rho(x_1, x_2, x_3) dS$ statt $\int_{f(D)} \rho dS$.

(b) Die gleichen Notationen werden benutzt, wenn ρ auf einer größeren Teilmenge von \mathbb{R}^3 definiert ist (einer Obermenge von $f(D)$).

(c) $\int_{f(D)} \rho dS$ kann ebenso definiert werden, wenn ρ nicht notwendig auf ganz $f(D)$ stetig ist, aber wenigstens stetig auf $f(D^0)$ und zudem $\rho(f(D))$ beschränkt. Es genügt sogar, dass $\rho \circ f|_{D^0}$ stetig ist und $\rho(f(D))$ beschränkt.

Eine typische Anwendung sind Massen und Schwerpunkte.

10.13 Wir betrachten ein parametrisiertes Flächenstück $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine nicht-negative stetige Funktion $\rho: f(D) \rightarrow [0, \infty[$; wir interpretieren $f(D)$ als ein dünnes Werkstück (eine Folie oder ein dünnes Blech) und $\rho(x_1, x_2, x_3)$ als Massendichte des dünnen Werkstücks an der Stelle $(x_1, x_2, x_3) \in f(D)$ in Gramm/Quadratmeter. Dann ist

$$m := \int_{f(D)} \rho dS$$

die Masse des Werkstücks. Ist $m > 0$, definiert man

$$\bar{x}_j := \frac{1}{m} \int_{f(D)} x_j dS$$

für $j \in \{1, 2, 3\}$ und nennt $\bar{x} := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ den *Schwerpunkt*. Ist ρ eine positive Konstante, so ist mit dem Flächeninhalt A von $f(D)$ einfach

$$\bar{x}_j = \frac{1}{A} \int_{f(D)} x_j dS.$$

Beispiel 10.14 Man finde die x_3 -Komponente \bar{x}_3 des Schwerpunkts einer Halbsphäre

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2, x_3 \geq 0\}$$

vom Radius $r > 0$, wenn diese eine konstante Massendichte hat.

Lösung: Es ist M ein parametrisiertes Flächenstück mit der Parametrisierung

$$f: [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \mapsto f(\theta, \varphi),$$

die durch (58) gegeben ist. Analog zu Beispiel 10.9 sehen wir, dass A die Hälfte des Flächeninhalts der ganzen Sphäre ist, also

$$A = 2\pi r^2.$$

Mit (60) erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= \frac{1}{A} \int_M x_3 dS = \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{r \cos \theta}_{=x_3} \underbrace{r^2 \sin \theta}_{=|\partial f/\partial \theta \times \partial f/\partial \varphi|} d\varphi d\theta \\ &= r \int_{\theta=0}^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{=\frac{1}{2} \sin(2\theta)} d\theta = \frac{r}{4} [-\cos(2\theta)]_0^{\pi/2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel 10.15 (Flächenintegrale erster Art über Graphen). Wir betrachten den Graphen $M := \text{graph}(h)$ einer Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 10.6, so dass also $M = f(D)$ mit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, h(x, y))$. Für jede stetige Funktion $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann

$$\int_M \rho dS = \int_D \rho(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2} d(x, y),$$

wobei (57) zur Berechnung des Betrags des Vektorprodukts benutzt wurde.

Zusammengesetzte Flächen und ihr Flächeninhalt

10.16 Eine *zusammengesetzte Fläche* in \mathbb{R}^3 ist eine Menge M der Form

$$M = f_1(D_1) \cup \dots \cup f_m(D_m),$$

wobei $f_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierte Flächenstücke sind für $j \in \{1, \dots, m\}$ und für alle $i \neq j$

$$f_i(D_i) \cap f_j(D_j) \subseteq f_i(\partial D_i).$$

10.17 Man definiert den Flächeninhalt A einer zusammengesetzten Fläche M wie in 10.16 als die Summe

$$A := \sum_{j=1}^m A_j$$

der Flächeninhalte A_j der parametrisierten Flächenstücke f_j . Ist $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig,²² so definiert man das Integral von ρ über M als

$$\int_M \rho dS := \sum_{j=1}^m \int_{f_j(D_j)} \rho dS.$$

Bemerkung 10.18 Man kann zeigen, dass der Flächeninhalt A eines zusammengesetzten Fläche M nur von M abhängt, nicht von der Wahl der parametrisierten Flächenstücke f_1, \dots, f_m . Ebenso hängt $\int_M \rho dS$ nur von M und ρ ab.

²²Oder wenigstens $\rho(M)$ beschränkt und $\rho \circ f_j|_{D_j^0}$ stetig für alle j .

Flächenintegrale zweiter Art

Eine weitere Art von Flächenintegral ist von größter Wichtigkeit insb. für die Physik und ihre Anwendungen.

10.19 Zur Motivation betrachten wir im Raum eine gleichmäßig strömende Flüssigkeit, die an jeder Stelle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ die gleiche Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Wir betrachten ein von zwei linear unabhängigen Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespanntes Parallelogramm M im Raum. Das Flüssigkeitsvolumen ΔV , das in einer Zeit $\Delta t > 0$ durch M strömt, ist gegeben durch das Spatprodukt

$$\Delta V = (\Delta t \vec{v}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

denn die Teilchen im Parallelogramm haben sich in der Zeit Δ um $\Delta t \vec{v}$ bewegt, so dass sich das Volumen eines Spats durch M hindurch bewegt hat (Skizze siehe Vorlesung). Das pro Zeit durch M strömende Flüssigkeitsvolumen ist also

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \vec{v} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Genauer können wir die Seite von M als Oberseite festlegen, aus welcher der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ herauschaut. Wir haben das Volumen positiv gezählt, wenn es aus der Oberseite nach oben herausgeströmt ist. Ist es nach unten geströmt, wird es negativ gezählt.

10.20 Sei nun allgemeiner $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $v: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto v(x)$ ein stetiges Vektorfeld und $f: D \rightarrow U$ ein parametrisiertes Flächenstück, wobei D ein (achsenparalleles) Rechteck ist. Für eine Zerlegung Q_1, \dots, Q_N von D in Rechtecke sei (x_j, y_j) die linke untere Ecke von Q_j . Ist $Q_j = [x_j + \Delta x] \times [y_j + \Delta y]$, so ist $f(Q_j)$ näherungsweise ein Parallelogramm mit Ecken wie in (61) und (62). Dort hat v näherungsweise den konstanten Wert $v(f(x_j, y_j))$, pro Zeit fließt also näherungsweise

$$\begin{aligned} & v(f(x_j, y_j)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \Delta x \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \Delta y \right) \\ &= v(f(x_j, y_j)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right) \Delta x \Delta y \\ &= v(f(x_j, y_j)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right) v_2(Q_j) \end{aligned}$$

durch $f(Q_j)$. Das gesamte pro Zeit durch $f(D)$ strömende Flüssigkeitsvolumen ist die Summe, also

$$\approx \sum_{j=1}^N v(f(x_j, y_j)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \right) v_2(Q_j).$$

Dies ist eine Riemannsche Summe für das folgende Flussintegral (mit $F := v$), konvergiert also gegen dieses, wenn die Maschenweite der Zerlegung in Teilrechtecke gegen 0 geht.

10.21 (Flächenintegrale zweiter Art). Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $F: f(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig.²³ Wir definieren das *Flussintegral von F über $f(D)$* (oder auch: das Flächenintegral zweiter Art) als

$$\int_{f(D)} F \cdot d\mathbf{S} := \int_D F(f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx, y).$$

Weitere Notationen dafür sind u.a. $\int_{f(D)} \langle F, d\mathbf{S} \rangle$ und $\int_{f(D)} F \cdot d\vec{S}$.

Genauer benutzen wir je nach Wahl der Oberseite von $f(D)$ diese Definition oder ihr Negatives.

10.22 Das sogenannte Standard-Normalenfeld

$$f(D^0) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) \mapsto \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|} \quad (63)$$

zu einem parametrisierten Flächenstück $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ nimmt nur Einheitsvektoren als Werte an (ist also insb. beschränkt). Wir nehmen im folgenden immer an, dass sich jeder Punkt in D^0 mit jedem anderen durch einen Weg in D^0 verbinden lässt. Wir nennen dann das obiges Standard-Normalenfeld und sein Negatives *Einheits-Normalenfelder* auf $f(D^0)$. Haben wir eines der Einheits-Normalenfelder $\nu: f(D^0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ gewählt, sprechen wir auch von einer *Orientierung* von $f(D^0)$. Anschaulich legt diese die ‘‘Oberseite’’ von $f(D^0)$ fest: Für $p \in f(D^0)$ zeigt der Vektor $\nu(p)$ ‘‘aus der Oberseite heraus nach oben’’. Man beachte, dass $\nu \circ f|_{D^0}$ stetig ist, denn die rechte Seite von (63) ist stetig in (x, y) (und ebenso ihr Negatives).

²³Oder lediglich $F(f(D))$ beschränkt und $F \circ f|_{D^0}$ stetig.

Wir präzisieren nun 10.21.

10.23 Sei auf $f(D^0)$ ein Einheits-Normalenfeld ν gewählt. Ist ν das Standard-Normalenfeld, definieren wir Flussintegrale wie in 10.21. Ist ν das Negative des Einheits-Normalenfelds, definieren wir

$$\int_{f(D)} F \cdot d\mathbf{S} := - \int_D F(f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y).$$

Falls Missverständnisse nicht auszuschließen sind, kann man zur Klarheit $\int_{(f(D), \nu)} F \cdot d\mathbf{S}$ schreiben.

Beispiel 10.24 Für die Parametrisierung $f: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Sphäre M von Radius $r > 0$ wie in (58) erhalten wir nach (59) und (60) für alle $p = f(\theta, \varphi)$ mit $(\theta, \varphi) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ das Standard-Normalenfeld

$$\nu(p) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} r^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} f(\theta, \varphi),$$

so dass also

$$\nu(p) = \frac{1}{|p|} p.$$

Das Negative des Standard-Normalenfelds ist die Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \mapsto -\frac{1}{|p|} p$.

Beispiel 10.25 (Flächenintegrale zweiter Art über Graphen). Wir betrachten den Graphen $M := \text{graph}(h)$ einer Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 10.6, so dass also $M = f(D)$ mit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, h(x, y))$. Versieht man $f(D^0)$ mit dem Standard-Normalenfeld für f , so ist für jede stetige Funktion $F = (F_1, F_2, F_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_M F \cdot d\mathbf{S} = \int_D F(x, y, h(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} d(x, y) =$$

$$\int_D F_3(x, y, h(x, y)) - F_1(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - F_2(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) d(x, y),$$

wobei das Vektorprodukt aus (57) benutzt wurde.

10.26 (Umschreiben eines Flussintegrals als Integral erster Art). Es sei auf $f(D^0)$ ein Einheitsnormalenfeld ν gewählt. Dann ist

$$\int_{(f(D), \nu)} F \cdot d\mathbf{S} = \int_{f(D)} (F \cdot \nu) dS,$$

wobei wir $\nu(p)$ für $p \in f(D) \setminus f(D^0)$ als beliebigen Einheitsvektor in \mathbb{R}^3 gewählt haben.

Wir zeigen dies für das Standard-Normalenfeld (für einen Beweis mit dessen Negativem setze man überall Minuszeichen). Für alle $(x, y) \in D^0$ ist

$$\begin{aligned} & (F(f(x, y)) \cdot \nu(f(x, y))) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \\ &= F(f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), \end{aligned}$$

da sich der Betrag im Nenner des Standard-Normalenfelds $\nu(f(x, y))$ kürzen lässt. Da ∂D eine Jordan-Nullmenge ist, können wir Funktionen darauf beliebig abändern, ohne Integrale über D zu ändern. Da der zweite und dritte Integrand wenigstens auf D^0 gleich sind, folgt

$$\begin{aligned} \int_{f(D)} F \cdot \nu dS &= \int_D F(f(x, y)) \cdot \nu(f(x, y)) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y) \\ &= \int_D F(f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \\ &= \int_{(D, \nu)} F \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

11 Der Gaußsche Integralsatz

Wir diskutieren den folgenden Satz, der u.a. für die Physik fundamental wichtig ist.

11.1 (Gaußscher Integralsatz). *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit C^1 -Rand und $F: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Versieht man den Rand ∂K mit dem äußeren Normalenfeld, so gilt*

$$\int_{\partial K} F \cdot d\mathbf{S} = \int_K \operatorname{div} F(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3).$$

Klären wir zunächst die Begriffe.

11.2 Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Kompaktum mit C^1 -Rand*, wenn für jeden Punkt $p \in \partial K$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in U$ existiert und eine stetig differenzierbare Abbildung $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla g(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in U$$

und

$$K \cap U = \{x \in U: g(x) \leq 0\}.$$

Man kann zeigen, dass dann $K^0 \cap U = \{x \in U: g(x) < 0\}$ und $(\partial K) \cap U = \{x \in U: g(x) = 0\}$ gilt. Insbesondere ist $\overline{K^0} = K$.

Zusätzlich zu den vorigen Bedingungen werden wir stets annehmen, dass ∂K eine zusammengesetzte Fläche ist.

Beispiel 11.3 Für jedes $r > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3: |x - x_0| \leq r\}$$

ein Kompaktum mit C^1 -Rand, denn $\partial \overline{B}_r(x_0)$ ist die Sphäre aller $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x - x_0| = r$. Diese ist in der offenen Menge

$$U := \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$$

enthalten und es ist

$$\overline{B}_r(x_0) \cap U = \{x \in U: g(x) \leq 0\}$$

mit der C^1 -Funktion

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x - x_0|^2 - r^2.$$

Diese erfüllt

$$\nabla g(x) = 2(x - x_0) \neq 0$$

für alle $x \in U$.

11.4 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit C^1 -Rand, so finden wir zu $x_0 \in \partial K$ eine Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ wie in der Definition. Für alle $y \in U \cap \partial K$ setzen wir

$$\alpha(y) := \frac{\nabla g(y)}{|\nabla g(y)|}.$$

Man kann zeigen, dass $\alpha(y)$ unabhängig von g ist und

$$\alpha: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

stetig ist. Man nennt α das *äußere Normalenfeld* auf ∂K . Es ist $\alpha(y)$ der eindeutige Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}\nabla g(y)$ derart, dass

$$y + tv \notin K$$

für alle genügend kleinen $t > 0$ und

$$y - tv \in K$$

für alle genügend großen $t \leq 0$. Das äußere Normalenfeld ist stetig.

Beispiel 11.5 Wir betrachten eine abgeschlossene Kugel $K := \overline{B}_r(0)$ um den Ursprung. Für g wie in Beispiel 11.3 (mit $x_0 := 0$) ist

$$\nabla g(x) = 2x$$

für alle $x \in \partial K$, also alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| = r$. Das äußere Normalenfeld ist also gegeben durch

$$\alpha(x) = \frac{2x}{|2x|} = \frac{x}{r}.$$

11.6 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit C^1 -Rand und $\alpha: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld. Die zusammengesetzte Fläche ∂K schreiben wir wie in der Definition solcher Flächen als

$$\partial K = f_1(D_1) \cup \cdots \cup f_m(D_m)$$

mit parametrisierten Flächenstücken $f_j: D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$. Um die parametrisierten Flächenstücke geeignet zu orientieren, wählen wir das Einheitsnormalenfeld $\nu_j: f_j(D_j^0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ als $\alpha|_{f_j(D_j^0)}$; die Außenseite von K ist also die Oberseite von $f_j(D_j^0)$. Für eine stetige Funktion $F: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$ setzen wir

$$\int_{\partial K} F \cdot d\mathbf{S} := \sum_{j=1}^m \int_{(f_j(D_j), \nu_j)} F \cdot d\mathbf{S}.$$

11.7 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit C^1 -Rand, so nennen wir eine Funktion $F = (F_1, F_2, F_3): K \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, wenn $F = G|_K$ für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $K \subseteq U$ und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $G = (G_1, G_2, G_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ setzen wir $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}|_K$ und definieren die Divergenz von F als die stetige Funktion

$$\operatorname{div} F: K \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

11.8 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) Es ist $\operatorname{div} F = 0$.
- (b) Für jedes Kompaktum $K \subseteq U$ mit C^1 -Rand gilt $\int_{\partial K} F \cdot d\mathbf{S} = 0$.

11.9 Erfüllt das Vektorfeld F eine (und somit beide) der äquivalenten Bedingungen, so wird F *quellenfrei* genannt.

Zum Nachweis von 11.8 nutzt folgende Beobachtung:

11.10 (Divergenz als Quellendichte). Es sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gilt für alle $x \in U$

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(B_r)} \int_{\partial B_r} F \cdot d\mathbf{S}$$

mit $B_r := \overline{B}_r(x)$.

Beweis: Mit dem Gaußschen Integralsatz und $1 = \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \int_{B_r} 1 d(x_1, x_2, x_3)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \left| \text{div } F(x) - \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \int_{\partial B_r} F \cdot d\mathbf{S} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \int_{B_r} \text{div } F(x) d(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \int_{B_r} \text{div } F(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) \right| \\
 &= \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \left| \int_{B_r} \text{div } F(x) - \text{div } F(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\text{vol}_3(B_r)} \text{vol}_3(B_r) \sup_{(x_1, x_2, x_3) \in B_r} |\text{div } F(x) - \text{div } F(x_1, x_2, x_3)|.
 \end{aligned}$$

Das Volumen lässt sich kürzen; das Supremum geht wegen der Stetigkeit von $\text{div } F$ für $r \rightarrow 0$ gegen 0.

11.11 Beweis von 11.8: Ist $\text{div } F = 0$, so ist nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial K} F \cdot d\mathbf{S} = \int_K \text{div } F(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Sind alle Flussintegrale über Ränder von Kompakta (oder auch nur Kugeln) 0, so folgt $\text{div } F = 0$ aus 11.10.

Bemerkung 11.12 Der Gaußsche Integralsatz ermöglicht es also, ein Flussintegral umzuschreiben als ein gewöhnliches dreidimensionales Integral.

Bemerkung 11.13 Der Gaußsche Integralsatz gilt auch für allgemeinere kompakte Mengen, deren Rand nur stückweise glatt ist (siehe Burg-Haf-Wille). In der Vorlesung haben wir eine Fassung für achsenparallele Quader formuliert, die sich leicht vollständig beweisen lässt.

Bemerkung 11.14 Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes lässt sich zum Beispiel das Archimedische Prinzip über die Auftriebskraft eines in Flüssigkeit eingetauchten Körpers begründen (siehe Vorlesung).

12 Der Stokessche Integralsatz

Auch der Stokessche Integralsatz ist von enormer Wichtigkeit für die Physik. Uns genügt folgender Spezialfall:

12.1 (Stokesscher Integralsatz). *Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück in \mathbb{R}^3 , so dass D eine abgeschlossene Kreisscheibe in \mathbb{R}^2 ist oder ein achsenparalleles Rechteck. Es sei γ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, der den Rand ∂D einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Weiter sei $\nu: f(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Standard-Normalenfeld zu f . dann gilt*

$$\int_{f \circ \gamma} F \cdot d\mathbf{s} = \int_{(f(D), \nu)} \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S}.$$

Bemerkung 12.2 Statt $\int_{f \circ \gamma}$ schreibt man kurz $\int_{\partial f(D)}$.

Bemerkung 12.3 Genauer betrachten wir im Falle eines Rechtecks $D = [a, b] \times [c, d]$ den Weg

$$\gamma: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (a + t(b - a), c) & \text{wenn } t \in [0, 1]; \\ (b, c + (t - 1)(d - c)) & \text{wenn } t \in [1, 2]; \\ (b + (t - 2)(a - b), d) & \text{wenn } t \in [2, 3]; \\ (a, d + (t - 3)(c - d)) & \text{wenn } t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Im Falle der Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ betrachten wir den Weg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Wie in 11.10 sieht man mit 12.1, dass sich für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ das Skalarprodukt $\operatorname{rot} F(x) \cdot v$ als eine Wirbeldichte um die Achse durch x in Richtung v auffassen lässt (Details siehe Vorlesung):

12.4 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^3$ mit $|v| = 1$. Sei $r > 0$ so klein, dass die Kreisscheibe D_r mit Mittelpunkt x in der Ebene orthogonal zu v ganz in U liegt. Wir orientieren diese so, dass v ein Standard-Einheitsnormalenvektor ist. Dann gilt*

$$\operatorname{rot} F(x) \cdot v = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_2(D_r)} \int_{\partial D_r} F \cdot d\mathbf{S}.$$

Damit erhält man wie im Beweis von 11.8:

12.5 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) Es ist $\operatorname{rot} F = 0$.
- (b) Es ist $\int_{\partial f(D)} F \cdot ds = 0$ für jedes parametrisierte Flächenstück $f: D \rightarrow U$ derart, dass D eine Kreisscheibe oder ein Rechteck ist.

12.6 Stetig differenzierbare Vektorfelder $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, die eine (und somit beide) der äquivalenten Bedingungen aus 12.4 erfüllen, werden *wirbelfrei* genannt.

Bemerkung 12.7 Für den Spezialfall, dass $f(D)$ ein Rechteck in der x_1 - x_2 -Ebene ist, kann man den Stokesschen Integralsatz sehr einfach beweisen (siehe Vorlesung). Er gilt auch für allgemeiner Flächen im Raum als die hier betrachteten (siehe Burg-Haf-Wille).

13 Komplex differenzierbare Funktionen und Cauchyscher Integralsatz

In der Mathematik 1 und 2 haben wir bereits Funktionen kennengelernt, die komplexen Zahlen z komplexe Zahlen $f(z)$ zuordnen; ein Beispiel ist die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

In diesem Kapitel gehen wir kurz auf einen Differenzierbarkeitsbegriff für solche Funktionen ein, die sogenannte *komplexe Differenzierbarkeit*. In den vorigen Kapiteln haben wir bereits Integralsätze kennengelernt (die Integralsätze von Gauß bzw. Stokes). Ein weiterer Integralsatz ist der *Cauchysche Integralsatz* über komplexe Kurvenintegrale komplex differenzierbarer Funktionen. Wir lernen nur einen Spezialfall kennen, das sogenannte *Lemma von Goursat*. Es ermöglicht uns die Berechnung gewisser uneigentlicher Integrale (der Fouriertransformierten von Funktionen der Form e^{-Cx^2}). Komplexe Differenzierbarkeit ist also u.a. ein *Hilfsmittel für Integralberechnungen*.

Komplexe Differenzierbarkeit

13.1 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* an einer Stelle $z \in U$ wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dz}(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

in \mathbb{C} existiert; hierbei strebt die komplexe Zahl $w \in U \setminus \{z\}$ gegen z . Ist f an jeder Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, so wird f *komplex differenzierbar* genannt (oder auch *holomorph*).

Bemerkung 13.2 Die komplexe Differenzierbarkeit an der Stelle z bedeutet, dass für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}$$

in \mathbb{C} existiert (er ist dann unabhängig von der Folge der z_n und wir nennen ihn $\frac{df}{dz}(z)$).

Bemerkung 13.3 Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ an einer Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar, so ist f dort stetig. [Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in 13.2 gilt ja

$$f(z_n) = f(z) + \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} (z_n - z) \rightarrow f(z) + \frac{df}{dz}(z)(z - z) = f(z)$$

für $n \rightarrow \infty$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z)$.]

Beispiel 13.4 Jede konstante Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar mit $\frac{df}{dz}(z) = 0$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexe Zahlen $z_n \neq z$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ gilt nämlich

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{c - c}{z_n - z} = \frac{0}{z_n - z} = 0 \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel 13.5 Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist komplex differenzierbar mit $\frac{df}{dz}(z) = 1$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ gilt nämlich

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{z_n - z}{z_n - z} = 1 \rightarrow 1$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel 13.6 Wie im Reellen gilt weiter für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{dz^k}{dz} = k z^{k-1};$$

folglich ist jedes komplexe Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ komplex differenzierbar mit

$$\frac{dp}{dz}(z) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dies folgt aus Rechenregeln für komplex differenzierbare Funktionen, die nun bereitgestellt werden.

13.7 (Neue komplex differenzierbare Funktionen aus gegebenen). *Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, die an einer Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar sind. Dann gilt:*

- (a) (Komplexe Linearität der Ableitung). Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist die Linearkombination $\alpha f + \beta g: U \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z komplex differenzierbar mit Ableitung $\frac{d(\alpha f + \beta g)}{dz}(z) = \alpha \frac{df}{dz}(z) + \beta \frac{dg}{dz}(z)$.
- (b) (Produktregel). Die Funktion $fg: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist an der Stelle z komplex differenzierbar mit Ableitung $\frac{d(fg)}{dz}(z) = \frac{df}{dz}(z)g(z) + f(z)\frac{dg}{dz}(z)$.

Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\alpha f(z_n) + \beta g(z_n) - (\alpha f(z) + \beta g(z))}{z_n - z} &= \alpha \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} + \beta \frac{g(z_n) - g(z)}{z_n - z} \\ &\rightarrow \alpha \frac{df}{dz}(z) + \beta \frac{dg}{dz}(z) \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Addieren von $0 = f(z)g(z_n) - f(z)g(z_n)$ im Zähler liefert weiter

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n)g(z_n) - f(z)g(z)}{z_n - z} &= \frac{f(z_n) - f(z)}{z - z_n} g(z_n) + f(z) \frac{g(z_n) - g(z)}{z_n - z} \\ &\rightarrow \frac{df}{dz}(z)g(z) + f(z)\frac{dg}{dz}(z); \end{aligned}$$

hierbei wurde benutzt, dass g nach 13.3 an der Stelle z stetig ist, somit $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = g(z)$ gilt.

13.8 Wir zeigen per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, dass $z \mapsto z^k$ komplex differenzierbar ist mit $\frac{d}{dz}(z^k) = k z^{k-1}$. Für $k = 1$ wurde dies in Beispiel 13.5 gezeigt. Gilt die Aussage für k , so ist nach der Produktregel

$$z \mapsto z^{k+1} = z^k z$$

komplex differenzierbar mit komplexer Ableitung

$$\frac{d}{dz}(z^{k+1}) = \left(\frac{d}{dz} z^k\right)z + z^k \frac{d}{dz} z = k z^{k+1} z + z^k 1 = (k+1)z^k = (k+1)z^{(k+1)-1},$$

wie benötigt. Wegen 13.7(a) ist dann auch jedes Polynom $z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$ komplex differenzierbar.

Ein sehr wichtiges weiteres Beispiel ist die komplexe Exponentialfunktion.

Beispiel 13.9 Die Funktion

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist komplex differenzierbar mit Ableitung $\frac{d \exp}{dz}(z) = \exp(z)$, also $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.

Um die komplexe Differenzierbarkeit der komplexen Exponentialfunktion zu begründen, brauchen wir Grundtatsachen über komplexe Potenzreihen:

13.10 Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ konvergiere an einer Stelle $w \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$. Dann gilt:

- (a) Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$.
- (b) Die durch $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gegebene komplexwertige Funktion auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: |z| < |w|\}$ ist an der Stelle $z = 0$ komplex differenzierbar mit $\frac{df}{dz}(0) = a_1$.

Die komplexe Exponentialfunktion ist somit an der Stelle $z = 0$ komplex differenzierbar mit

$$\frac{d \exp}{dz}(0) = \frac{1}{1!} = 1 = \exp(0).$$

Gegeben $z \in \mathbb{C}$ und eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ ist $(z_n - z)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die gegen 0 konvergiert. Wegen $e^{z_n} = e^{z+z_n-z} = e^z e^{z_n-z}$ folgt

$$\frac{e^{z_n} - e^z}{z_n - z} = e^z \frac{e^{z_n-z} - 1}{z_n - z} = e^z \frac{e^{z_n-z} - e^0}{(z_n - z) - 0} \rightarrow e^z \frac{d \exp}{dz}(0) = e^z 1 = e^z$$

für $n \rightarrow \infty$.

13.11 Nachweis von 13.10 (a): Per Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$, ihre Summanden $a_k w^k$ bilden also eine gegen 0 konvergente Folge. Als konvergente Folge ist diese beschränkt, es gibt also ein $C \geq 0$ derart, dass

$$|a_k| |w^k| \leq C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ ist $q := |z|/|w| < 1$, die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ also konvergent. Da

$$|a_k z^k| = |a_k w^k| \frac{|z|^k}{|w|^k} \leq C q^k,$$

ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Bevor wir (b) beweisen können, zeigen wir folgende Hilfsaussage (c): Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}|w|$ definiert $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine beschränkte Funktion.

Es ist nämlich

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k w^k| \left(\frac{|z|}{|w|} \right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} C \left(\frac{1}{2} \right)^k = C \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2C$$

unter Benutzung der Summenformel für die geometrische Reihe.

Nachweis von (b): Es ist

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k - a_0}{w} - a_1 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k w^{k-1} = w \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n,$$

die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n$ nach (a) somit für $|z| < |w|$ konvergent gegen eine Funktion $z \mapsto h(z)$, die nach (c) für $|z| < \frac{1}{2}|w|$ beschränkt ist. Es gibt also eine reelle Zahl $K \geq 0$ mit $|h(z)| \leq K$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}|w|$. Für z wie zuvor mit $z \neq 0$ gilt dann

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} - a_1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^k - a_0}{z} - a_1 \right| = |zh(z)| = |z| |h(z)| \leq |z| K \rightarrow 0$$

für $z \rightarrow 0$, so dass also

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} - a_1 \rightarrow 0$$

und somit $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \rightarrow a_1$. Die komplexe Ableitung $\frac{df}{dz}(0)$ existiert also und ist gleich a_1 .

Bemerkung 13.12 Es lässt sich zeigen, dass jede auf einer Kreisscheibe $|z| < r$ konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ dort komplex differenzierbar ist mit Ableitung $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. Wir benötigen dies nicht (und verzichten auf den Beweis); ein Verständnis der Exponentialfunktion genügt uns.

Über 13.7 hinaus benötigen wir noch die Kettenregel für komplex differenzierbare Funktionen.

13.13 Es seien U und V offene Teilmengen von \mathbb{C} . Weiter sei $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $g(V) \subseteq U$, die an einer Stelle $z \in V$ komplex differenzierbar ist und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die an der Stelle $g(z)$ komplex differenzierbar ist. Dann ist $f \circ g: V \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z komplex differenzierbar mit komplexer Ableitung

$$\frac{d(f \circ g)}{dz}(z) = \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z).$$

Beispiel 13.14 Für jedes $c \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{cz^2}$$

komplex differenzierbar.

Diese ist nämlich von der Form $\exp \circ g$ mit der komplexen Exponentialfunktion \exp (die nach Beispiel 13.9 komplex differenzierbar ist) und der Polynomfunktion $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto cz^2$, die nach Beispiel 13.6 komplex differenzierbar ist. Nach der Kettenregel ist $\exp \circ g$ also komplex differenzierbar.

13.15 Zum Beweis der Kettenregel sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $V \setminus \{z\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $g(z_n) \neq g(z)$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $(g(z_n))_{n \geq n_0}$ eine Folge in $U \setminus \{g(z)\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = g(z)$; folglich gilt

$$\frac{f(g(z_n)) - f(g(z))}{z_n - z} = \frac{f(g(z_n)) - f(g(z))}{g(z_n) - g(z)} \frac{g(z_n) - g(z)}{z_n - z} \rightarrow \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z).$$

Fall 2: Die Menge $M := \{n \in \mathbb{N}: g(z_n) = g(z)\}$ sei unendlich. Schreiben wir $M = \{n_k: k \in \mathbb{N}\}$ mit $n_1 < n_2 < \dots$, so ist also

$$\frac{dg}{dz}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(z_{n_k}) - g(z)}{z_{n_k} - z} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{z_{n_k} - z} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Fall 2a: Ist $\mathbb{N} \setminus M$ endlich, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(z_n) = g(z)$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$\frac{f(g(z_n)) - f(g(z))}{z_n - z} = \frac{f(g(z)) - f(g(z))}{z_n - z} = \frac{0}{z_n - z} = 0,$$

so dass also

$$\frac{f(g(z_n)) - f(g(z))}{z_n - z} \rightarrow 0 = \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Fall 2b: Ist $\mathbb{N} \setminus M$ eine unendliche Menge, so besteht diese aus natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < \dots$. Nach Fall 1 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(g(z_{m_k})) - f(g(z))}{z_{m_k} - z} = \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z).$$

Schreiben wir $M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $n_1 < n_2 < \dots$, so gilt nach Fall 2a weiter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(g(z_{n_k})) - f(g(z))}{z_{n_k} - z} = \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z).$$

Da $\mathbb{N} = M \cup (\mathbb{N} \setminus M)$, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(g(z_n)) - f(g(z))}{z_n - z} = \frac{df}{dz}(g(z)) \frac{dg}{dz}(z).$$

Integrale komplexwertiger Funktionen

Im Folgenden benötigen wir komplexwertige Integrale:

13.16 Das *Integral* einer stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto u(t) + iv(t)$ mit Realteil u und Imaginärteil v ist definiert als

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Linearität des Integrals rechnet man direkt nach: Ist auch $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist für all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Wir benutzen folgende Abschätzung:

13.17 Für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Nachweis: Es existiert eine komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ derart, dass

$$z \int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Dann ist also

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= z \int_a^b f(t) dt = \int_a^b z f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(z f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |z f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Komplexe Kurvenintegrale

Komplexe Kurvenintegrale sind wie folgt definiert.

13.18 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein C^1 -Weg in U . Wir definieren das Integral von f längs des Weges γ als

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Linearität des komplexen Kurvenintegrals rechnet man direkt nach: Ist auch $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist für all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} (\alpha f(\zeta) + \beta g(\zeta)) d\zeta = \alpha \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta + \beta \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta.$$

Beispiel 13.19 Wir betrachten die stetige Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ und den C^1 -Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it},$$

der den Einheitskreis einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Für $t \in [0, 2\pi]$ ist dann $\gamma'(t) = ie^{it}$, also

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ wird *Stammfunktion* für f genannt, wenn F komplex differenzierbar ist und

$$\frac{dF}{dz}(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

13.20 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Hat f eine Stammfunktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (64)$$

für jeden C^1 -Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ in U . Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$$

für jeden geschlossenen C^1 -Weg γ in U .

Beweis. Wie im Beweis von 13.13 (wo man V durch $[a, b]$ ersetzt) sieht man, dass die Funktion

$$F \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto F(\gamma(t))$$

differenzierbar ist mit

$$(F \circ \gamma)'(t) = \frac{dF}{dz}(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t),$$

was eine stetige Funktion von $t \in [a, b]$ ist. Es ist also $F \circ \gamma$ eine stetig differenzierbare Funktion. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir nun wie gewünscht

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\ &= [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Beispiel 13.21 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden geschlossenen C^1 -Weg γ in \mathbb{C} ist

$$\int_{\gamma} \zeta^n d\zeta = 0,$$

denn $z \mapsto \frac{1}{n+1}z^{n+1}$ ist eine Stammfunktion für $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$.

Beispiel 13.22 Die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist komplex differenzierbar mit Ableitung $\frac{d}{dz}(1/z) = -\frac{1}{z^2}$, denn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Definitionsbereich mit $z_n \neq z$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ gilt

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}}{z_n - z} = \frac{\frac{z}{z_n z} - \frac{z_n}{z_n z}}{z_n - z} = \frac{\frac{z - z_n}{z_n z}}{z_n - z} = -\frac{1}{z_n z} \rightarrow -\frac{1}{z^2}$$

für $n \rightarrow \infty$. Da nach Beispiel 13.19 für den dort beschriebenen geschlossenen C^1 -Weg γ

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \neq 0$$

ist, kann f nach 13.20 keine Stammfunktion besitzen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Auch für komplexe Kurvenintegrale ist eine Abschätzung des Betrags möglich.

13.23 *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein C^1 -Weg. Unter Benutzung der Weglänge*

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

gilt dann

$$\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq L(\gamma) \sup\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\}.$$

Zum Nachweis kürzen wir

$$M := \sup\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\}$$

ab. Nach 13.17 ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|f(\gamma(t))|}_{\leq M} |\gamma'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M L(\gamma), \end{aligned}$$

wie behauptet.

13.24 Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Weg, der stückweise C^1 ist; es gibt also $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir definieren

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} f(\zeta) d\zeta.$$

Bemerkung 13.25 Ersetzt man C^1 -Wege durch stückweise stetig differenzierbare Wege, so bleiben 13.20 und die Integralabschätzung 13.23 gültig.

Dies zeigt man durch Hinschreiben der Integrale längs γ als Summe von Integralen über Teilintervalle, auf denen γ stetig differenzierbar ist. So gilt zum Beispiel mit einer Stammfunktion F für f in 13.20

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^m (F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1}))) \\ &= F(\gamma(t_m)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Bemerkung 13.26 Beim Umparametrisieren eines Wegs $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit einem C^1 -Diffeomorphismus $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ gilt für stetige Funktionen $f: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma \circ \phi} f(\zeta) d\zeta = \pm \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei das positive Vorzeichen zu wählen ist, wenn ϕ orientierungserhaltend ist, das negative Vorzeichen im orientierungsumkehrenden Fall. Dies sieht man wie in 8.17.

Notationen für geradlinige Wege und Rechteckwege

13.27 Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ derart, dass die Verbindungsstrecke von z_1 und z_2 ganz in U enthalten ist, so definieren wir

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \tag{65}$$

mit $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$, $t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$. Ist ein (ausgefülltes) Rechteck \square mit unterer linker Ecke z_1 , unterer rechter Ecke z_2 , oberer rechter Ecke z_3 und

oberer linker Ecke z_4 ganz in U enthalten, so definieren wir

$$\int_{\partial\Box} f(\zeta) d\zeta := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

mit dem stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [0, 4] \rightarrow U$,

$$t \mapsto \begin{cases} z_1 + t(z_2 - z_1) & \text{wenn } t \in [0, 1]; \\ z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) & \text{wenn } t \in [1, 2]; \\ z_3 + (t - 2)(z_4 - z_3) & \text{wenn } t \in [2, 3]; \\ z_4 + (t - 3)(z_1 - z_4) & \text{wenn } t \in [3, 4] \end{cases}$$

der den Rand $\partial\Box$ des Rechtecks \Box beginnend bei der linken unteren Ecke z_1 einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Dann ist

$$\int_{\partial\Box} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta + \int_{z_2}^{z_3} f(\zeta) d\zeta + \int_{z_3}^{z_4} f(\zeta) d\zeta + \int_{z_4}^{z_1} f(\zeta) d\zeta$$

(wobei für die Teilwege auf $[1, 2]$, $[2, 3]$ und $[3, 4]$ im Wegintegral $u = t - 1$, $u = t - 2$ bzw. $u = t - 3$ substituiert wurde, vgl. Bemerkung 13.26).

Bemerkung 13.28 Sind $z_1 = a \in \mathbb{R}$ und $z_2 = b \in \mathbb{R}$, so ist $\gamma(t) = a + t(b - a)$ mit $\gamma'(t) = b - a$, das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(a + t(b - a))(b - a) dt = \int_a^b f(x) dx$$

im Sinne von (65) also gleich dem gewöhnlichen Integral. Hierbei wurde $u = a + t(b - a)$, $du = (b - a)dt$ substituiert.

Das Lemma von Goursat

13.29 (Lemma von Goursat). *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Für jedes ganz in U gelegene Rechteck \Box gilt dann*

$$\int_{\partial\Box} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Bevor wir einen Begründung für das Lemma geben, betrachten wir eine typische Anwendung.

Anwendung: Berechnung eines uneigentlichen Integrals

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto u(t) + iv(t)$ eine stetige Funktion mit Realteil $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen f *uneigentlich über \mathbb{R} integrierbar*, wenn u und v uneigentlich über \mathbb{R} integrierbar sind im Sinne von §1 der Mathematik 2-Vorlesung. Was u angeht, müssen also die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty u(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R u(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^0 u(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 u(t) dt$$

konvergieren und man definiert $\int_{-\infty}^\infty u(t) dt$ als deren Summe; analog für v . Wir definieren

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt := \int_{-\infty}^\infty u(t) dt + i \int_{-\infty}^\infty v(t) dt.$$

Insbesondere ist dann

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt.$$

Wir wissen aus 7.88, dass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (66)$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass für alle $C > 0$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-Ct^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{C}}. \quad (67)$$

(Mit der Substitution $u = \sqrt{C}t$, $du = \sqrt{C} dt$ kann man (67) auch auf (66) zurückführen). Mit Methoden der Funktionentheorie wollen wir sehen:

13.30 Für jedes $C > 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-C(t+iy)^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{C}}.$$

Nachweis: Für $y = 0$ ist dies (67). Wir führen den Beweis für $y > 0$; der Fall $y < 0$ lässt sich analog behandeln. Es ist

$$e^{-C(t+iy)^2} = e^{-Ct^2 - i2Cty + Cy^2} = e^{-Ct^2 + Cy^2} e^{-i2ty},$$

also $|e^{-C(t+iy)^2}| = e^{-Ct^2 + Cy^2} = e^{Cy^2} e^{-Ct^2}$, was nach (67) eine über \mathbb{R} uneigentlich integrierbare Funktion ist. Nach dem Majorantenkriterium existiert also das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-C(t+iy)^2} dt$. Um es zu berechnen, betrachten wir für $R > 0$ das Rechteck \square_R mit den Ecken $-R, R, R+iy$ und $-R+iy$. Nach dem Lemma von Goursat ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \square_R} e^{-C\zeta^2} d\zeta \\ &= \int_{-R}^R e^{-C\zeta^2} d\zeta + \int_R^{R+iy} e^{-C\zeta^2} d\zeta + \int_{R+iy}^{-R+iy} e^{-C\zeta^2} d\zeta + \int_{-R+iy}^{-R} e^{-C\zeta^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite stimmt hierbei mit $\int_{-R}^R e^{-Ct^2} dt$ überein, das dritte ist gleich

$$- \int_{-R+iy}^{R+iy} e^{-C\zeta^2} d\zeta = - \int_{-R}^R e^{-C(t+iy)^2} dt.$$

Auflösen liefert

$$\int_{-R}^R e^{-C(t+iy)^2} dt = \int_{-R}^R e^{-Ct^2} dt + \int_R^{R+iy} e^{-C\zeta^2} d\zeta + \int_{-R+iy}^{-R} e^{-C\zeta^2} d\zeta. \quad (68)$$

Wir zeigen, dass das zweite und dritte Integral auf der rechten Seite von (68) für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. Folglich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-C(t+iy)^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-C(t+iy)^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-Ct^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ct^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{C}}.$$

Der geradlinige Weg $\gamma_R: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto R + ity$ von R nach $R + iy$ hat Weglänge $|y|$. Für alle $t \in [0, 1]$ gilt für $\zeta := \gamma_R(t)$ weiter

$$|e^{-C\zeta^2}| = |e^{-C(R+ity)^2}| = e^{-CR^2} e^{Ct^2 y^2} \leq e^{-CR^2} e^{Cy^2}$$

mit $e^{-CR^2} e^{Cy^2}$ als einer oberen Schranke. Nach der Integralabschätzung 13.23 für komplexe Kurvenintegrale gilt also

$$\left| \int_R^{R+iy} e^{-C\zeta^2} d\zeta \right| = \left| \int_{\gamma_R} e^{-C\zeta^2} d\zeta \right| \leq L(\gamma_R) e^{-CR^2} e^{Cy^2} = y e^{Cy^2} e^{-CR^2} \rightarrow 0$$

für $R \rightarrow \infty$. Analog sieht man, dass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+iy}^{-R} e^{-C\zeta^2} d\zeta = 0$.

Beweis des Lemmas von Goursat

Beim Beweis des Lemmas von Goursat (der in der Vorlesung nur skizziert wird) nutzt uns folgende Tatsache.

13.31 *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und*

$$R(z) := f(z) - f(z_0) - \frac{df}{dz}(z_0)(z - z_0)$$

für $z \in U$, so dass also

$$f(z) = f(z_0) + \frac{df}{dz}(z_0)(z - z_0) + R(z).$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|R(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta.$$

Nachweis: Es sei

$$r(z) := \begin{cases} R(z)/(z - z_0) & \text{für } z \in U \setminus \{z_0\}; \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Auf $U \setminus \{z_0\}$ ist

$$r(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{df}{dz}(z_0)$$

stetig in z . Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ gilt

$$r(z_n) = \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} - \frac{df}{dz}(z_0) \rightarrow 0 = r(z_0)$$

für $n \rightarrow \infty$. Also ist r auch an der Stelle z_0 stetig und somit stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es nach 7.33 im Skript Mathematik 2 für Maschinenbauer (von Prof. Glöckner im SoSe 2022) also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|r(z)| = |r(z) - r(z_0)| \leq \varepsilon \tag{69}$$

für alle $z \in U$ mit $|z - z_0| \leq \delta$. Multiplikation von (69) mit $|z - z_0|$ liefert das Gewünschte.

13.32 Beweis des Lemmas von Goursat. Wäre die Aussage für f und δ falsch, so wäre

$$C := \left| \int_{\partial \square} f(\zeta) d\zeta \right| > 0.$$

Wir setzen $\square_0 := \square$. Wir teilen \square_0 auf in vier Rechtecke R_1, \dots, R_4 halber Seitenlängen, die den Mittelpunkt von \square_0 als eine Ecke haben. Da sich die Integrale über Teilwege im Inneren von \square_0 wegheben, ist

$$\int_{\partial \square_0} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial R_j} f(\zeta) d\zeta.$$

Wegen der Dreiecksungleichung muss für ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\left| \int_{\partial R_j} f(\zeta) d\zeta \right| \geq \frac{C}{4}$$

sein; wir setzen $\square_1 := R_j$. Induktiv finden wir Rechtecke $\square_n \subseteq \square_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left| \int_{\partial \square_n} f(\zeta) d\zeta \right| \geq \frac{C}{4^n} \tag{70}$$

und die Seitenlängen von \square_n die Hälfte derjenigen von \square_{n-1} sind. Für Umfang (Weglänge der Randkurve) und Durchmesser haben wir also

$$L(\partial \square_n) = \frac{1}{2} L(\partial \square_{n-1})$$

und

$$\text{diam}(\square_n) = \frac{1}{2} \text{diam}(\square_{n-1}).$$

Folglich ist

$$L(\partial \square_n) = \frac{1}{2^n} L(\partial \square_0)$$

und

$$\text{diam}(\square_n) = \frac{1}{2^n} \text{diam}(\square_0).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei z_n die linke untere Ecke von \square_n . Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$2^{-N} \text{diam}(\square_0) < \varepsilon.$$

Für alle $n, m \geq N$ sind $z_n \in \square_n \subseteq \square_N$ und $z_m \in \square_m \subseteq \square_N$, also

$$|z_n - z_m| \leq \text{diam}(\square_N) = 2^{-N} \text{diam}(\square_0) < \varepsilon.$$

Also ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{C} und somit konvergent gegen ein $z_0 \in \mathbb{C}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $z_m \in \square_m \subseteq \square_n$ für alle $m \geq n$, somit

$$z_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} z_m \in \square_n,$$

da \square_n eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Sei

$$R(z) := f(z) - f(z_0) - \frac{df}{dz}(z_0)(z - z_0) \quad \text{für } z \in U.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{\partial \square_n} f(\zeta) d\zeta = \underbrace{\int_{\partial \square_n} f(z_0) + \frac{df}{dz}(z_0)(\zeta - z_0) d\zeta}_{=0} + \int_{\partial \square_n} R(\zeta) d\zeta = \int_{\partial \square_n} R(\zeta) d\zeta;$$

das erste Integral verschwindet nach Beispiel 13.21. Sei

$$\varepsilon := \frac{1}{L(\partial \square_0) \text{diam}(\square_0)} \frac{C}{2}.$$

Nach 13.31 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|R(z)| \leq |z - z_0| \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta.$$

Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$2^{-n} \text{diam}(\square_0) \leq \delta.$$

Für jedes $\zeta \in \partial \square_n$ ist $|\zeta - z_0| \leq \text{diam}(\square_n) = 2^{-n} \text{diam}(\square_0) \leq \delta$, somit

$$|R(\zeta)| \leq |\zeta - z_0| \varepsilon \leq 2^{-n} \text{diam}(\square_0) \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \square_n} f(\zeta) d\zeta \right| &= \left| \int_{\partial \square_n} R(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \underbrace{L(\partial \square_n)}_{=2^{-n}L(\partial \square_0)} \sup\{|R(\zeta)| : \zeta \in \partial \square_n\} \\ &\leq 2^{-n} L(\partial \square_0) 2^{-n} \text{diam}(\square_0) \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{4^n} C < \frac{1}{4^n} C. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist nach (70) jedoch $\geq \frac{1}{4^n} C$, Widerspruch. Also muss doch $C = 0$ sein.

14 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ermöglicht, recht allgemeine Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

als eine Überlagerung (ein Integral) periodischer Schwingungen $t \mapsto e^{its}$ aufzufassen,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{its} ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad (71)$$

mit einer Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die sich aus f berechnen lässt:

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-its} dt.$$

Die Funktion \hat{f} wird Fourier-Transformierte von f genannt. Fourier-Transformierte sind wichtige Hilfsmittel, etwa beim Studium von gewöhnlichen Differentialgleichungen und partiellen Differentialgleichungen.

Definition der Fourier-Transformation

14.1 Wir nennen eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *stückweise stetig*, wenn $f|_{[a,b]}$ stückweise stetig ist für alle reellen Zahlen $a < b$, also eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

des Intervalls $[a, b]$ existiert, so dass $f|_{]t_{j-1}, t_j[}$ eine stetige Fortsetzung auf $[t_{j-1}, t_j]$ besitzt, für alle $j \in \{1, \dots, m\}$.

14.2 Eine stückweise stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

also die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^0 |f(t)| dt$ und $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ konvergieren. Nach dem Majorantenkriterium konvergieren dann insbesondere auch die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ und $\int_0^{\infty} f(t) dt$ und wir schreiben $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ für deren Summe, wie üblich.

14.3 Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stückweise stetige Funktion, so nennen wir die Funktion

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-its} dt$$

die *Fourier-Transformierte* von f . Man schreibt auch $\mathcal{F}(f)$ statt \hat{f} .

Die *Fourier-Transformation* ordnet der Funktion f ihre Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(f)$ zu.

Bemerkung 14.4 Da f stückweise stetig ist, ist auch für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t) e^{-its}$$

stückweise stetig. Da $|f(t) e^{-its}| = |f(t)| |e^{-its}| = |f(t)|$, ist die Funktion $t \mapsto f(t) e^{-its}$ absolut integrierbar, nach dem Majorantenkriterium. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-its} dt$ in der Definition von $\hat{f}(s)$ ist also konvergent.

Unter Benutzung der Linearität des Integrals folgt:

14.5 (Linearität der Fouriertransformation). Sind $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbare, stückweise stetige Funktionen, so ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ auch die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ absolut integrierbar und stückweise stetig, mit Fouriertransformierter

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}.$$

Beispiel: Fourier-Transformierte eines Rechteckimpulses

Für reelle Zahlen $a < b$ betrachten wir die charakteristische Funktion

$$f := 1_{[a,b]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [a, b]; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (72)$$

des Intervalls $[a, b]$. Dann ist f stückweise stetig und zudem absolut integrierbar (da f außerhalb einer beschränkten Menge konstant 0 ist). Für $s = 0$ ist $e^{-its} = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$; für $s \neq 0$ hat $t \mapsto e^{-its}$ die Stammfunktion

$$t \mapsto \frac{e^{-its}}{-is}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[a,b]}(t) e^{-its} dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-its} dt \\ &= \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi} & \text{wenn } s = 0; \\ \frac{1}{2\pi is} (e^{-ias} - e^{-ibs}) & \text{wenn } s \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Da $a = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}$ und $b = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$, ist hierbei

$$e^{-ias} - e^{-ibs} = e^{-i\frac{a+b}{2}s} \left(e^{i\frac{b-a}{2}s} - e^{-i\frac{b-a}{2}s} \right) = e^{-i\frac{a+b}{2}s} 2i \sin\left(\frac{b-a}{2}s\right).$$

Also ist

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi} & \text{wenn } s = 0; \\ \frac{1}{\pi s} e^{-i\frac{a+b}{2}s} \sin\left(\frac{b-a}{2}s\right) & \text{wenn } s \neq 0. \end{cases} \quad (73)$$

Anwendung: Beugung am Einfachspalt

Für die Allgemeinbildung sei erwähnt: Das vorige Beispiel tritt in der Physik auf, wenn Licht an einem Spalt gebeugt wird. Interessant ist dann das Betragsquadrat $|\hat{f}(s)|^2$.

Im Raum bewege sich eine ebene Welle in Richtung der z -Achse. Die elektrische Feldstärke in der x - y -Ebene zur Zeit t sei der Realteil von $E_0 e^{i\omega t}$ mit einer Kreisfrequenz $\omega > 0$. In der Ebene $z = 0$ befinde sich ein Hindernis, so dass nur der Spalt $a \leq x \leq b$ offen ist mit gewissen $a < b$. Wegen der Translationssymmetrie längs der y -Achse betrachten wir für große z , in großem Abstand r vom Ursprung das durchdringende Licht nur für $y = 0$, im Winkel θ zur z -Achse in der x - z -Ebene. Nach dem Huygensschen Prinzip ergibt sich die Feldstärke dort durch Überlagerung der Wellen, die von punktförmigen Quellen im Spalt ausgehen.²⁴ Diese müssen die Strecke r zurücklegen falls $x = 0$; für allgemeine x wird zusätzlich $-x \sin(\theta)$ zurückgelegt, also näherungsweise $-x\theta$ für kleine θ . Die Strecke ist also

$$r - x\theta.$$

²⁴Wir nehmen an, dass wir zweidimensional denken dürfen und auch nur Lichtquellen mit $y = 0$ betrachten müssen. Betrachten wir stattdessen eine Versuchsanordnung mit einem in y -Richtung schmalen Spalt, ist dies auf jeden Fall gerechtfertigt. Wir müssen zudem berücksichtigen, dass die elektrische Feldstärke nicht ein Skalar, sondern ein Vektor ist. Wir können polarisiertes Licht benutzen, das in Richtung der y -Achse schwingt.

Sei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die in x ausgehende Welle liefert am Beobachtungspunkt eine Feldstärke proportional zum Realteil von

$$e^{i\omega(t - \frac{r-x}{c})} = e^{i\omega(t-r/c)} e^{i\omega x/c}.$$

Mit einer Konstanten A ist die gemessene Feldstärke dann der Realteil von

$$A e^{i\omega(-r/c)t} \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{i\omega x\theta/c} dx = A e^{i\omega(-r/c)t} \hat{f}(-\omega\theta/c).$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit Amplitude $|A| |\hat{f}(-\omega\theta/c)|$. Die Intensität des Lichts, die man wahrnimmt und misst, ist proportional zum Quadrat der Amplitude, also proportional zu

$$|\hat{f}(-\omega\theta/c)|^2.$$

Hierbei ist

$$|\hat{f}(s)|^2 = \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} & \text{wenn } s = 0; \\ \frac{1}{\pi^2 s^2} \sin^2\left(\frac{b-a}{2}s\right) & \text{wenn } s \neq 0. \end{cases}$$

Eine Skizze des Funktionsgraphen wird an der Tafel gegeben.

Beispiel: Fourier-Transformierte einer Glockenkurve

Für $C > 0$ betrachten wir die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{-Ct^2}.$$

Diese ist absolut integrierbar, mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{C}}$ (siehe (67)).

Wir zeigen nun:

14.6 Die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-Ct^2}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\sqrt{C\pi}} e^{-\frac{s^2}{4C}} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist nämlich mit quadratischer Ergänzung

$$Ct^2 + its = C \left(t + \frac{is}{2C} \right)^2 + \frac{s^2}{4C}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ct^2} e^{-its} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ct^2 - its} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C(t + \frac{is}{2C})^2 - \frac{s^2}{4C}} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C(t + \frac{is}{2C})^2} e^{-\frac{s^2}{4C}} dt \\
 &= \frac{e^{-\frac{s^2}{4C}}}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-C(t + \frac{is}{2C})^2} dt}_{=\sqrt{\pi/C}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{s^2}{4C}}}{2\sqrt{C\pi}};
 \end{aligned}$$

hierbei wurde 13.30 benutzt.

Einige Rechenregeln für Fourier-Transformierte

14.7 *Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stückweise stetige Funktion. Dann gilt:*

- (a) (Verschiebungssatz). Für $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t - a)$ die Fourier-Transformierte $\hat{g}(s) = e^{-ias} \hat{f}(s)$.
- (b) (Verschiebung im Bildbereich). Für $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{iat} f(t)$ die Fourier-Transformierte $\hat{h}(s) = \hat{f}(s - a)$.
- (c) (Ähnlichkeitssatz). Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Funktion $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t/a)$ die Fourier-Transformierte $\hat{k}(s) = |a| \hat{f}(as)$.
- (d) (Differentiationssatz). Ist f zudem stetig differenzierbar und die Ableitung f' absolut integrierbar, so gilt $\widehat{f'}(s) = is \hat{f}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Nachweis:

(a) Die Substitution $u = t - a$, $du = dt$ liefert

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-its} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(u+a)s} du \\
 &= e^{-ias} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ius} du = e^{-ias} \hat{f}(s).
 \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t) e^{-its} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it(s-a)} dt = \hat{f}(s-a).$$

(c) Im Falle $a > 0$ liefert die Substitution $u = \frac{t}{a}$, $du = \frac{1}{a} dt$ liefert

$$\begin{aligned} \hat{k}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t/a) e^{-its} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iatu} a du \\ &= a \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-it(as)} du = a \hat{f}(as). \end{aligned}$$

Im Falle $a < 0$ ist das zweite Integral durch $\int_{\infty}^{-\infty}$ zu ersetzen. Übergang zu $\int_{-\infty}^{\infty}$ bedeutet Übergang zum Negativen, so dass in der zweiten Zeile a durch $-a = |a|$ zu ersetzen ist.

(d) Es sei $s \in \mathbb{R}$. Für $R > 0$ zeigt partielle Integration, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f'(t) e^{-its} dt &= \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-its}]_{t=-R}^R + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f(t) is e^{-its} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-its}]_{t=-R}^R + is \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f(t) e^{-its} dt. \end{aligned}$$

Für $R \rightarrow \infty$ geht die linke Seite gegen $\hat{f}'(s)$, der zweite Summand der letzten Zeile gegen $is \hat{f}(s)$. Der erste Summand geht gegen 0, denn man kann zeigen, dass $f(t) \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$.

[Details für $t \rightarrow \infty$: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\int_0^{\infty} |f'(t)| dt < \infty$, gibt es ein $R > 0$ derart, dass $\int_R^{\infty} |f'(t)| dt \leq \varepsilon/2$. Für alle $t_2 > t_1 \geq R$ ist dann

$$|f(t_2) - f(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt \leq \int_R^{\infty} |f'(t)| dt \leq \varepsilon/2.$$

Dann gilt $|f(t)| < \varepsilon$ für alle $t \geq R$, denn wäre $|f(t_1)| \geq \varepsilon$ für ein $t_1 \geq R$, so wäre nach dem Vorigen $|f(t_2) - f(t_1)| \leq \varepsilon/2$ für alle $t_2 \geq t_1$ und somit

$$\varepsilon \leq |f(t_1)| = |f(t_2) - f(t_1) + f(t_2)| \leq |f(t_2) - f(t_1)| + |f(t_2)| \leq |f(t_2)| + \varepsilon/2,$$

folglich $|f(t_2)| \geq \varepsilon/2$ und somit $\int_{t_1}^{\infty} |f(t)| dt \geq \int_{t_1}^{\infty} \varepsilon/2 dt = \infty$ im Widerspruch zur absoluten Integrierbarkeit von f .]

Man könnte den Differentiationssatz noch für etwas etwas allgemeinere Funktionen formulieren.

14.8 Wir nennen eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *stückweise stetig differenzierbar* (oder *stückweise C^1*) wenn f stetig ist und es für alle reellen Zahlen $a < b$ eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt derart, dass $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Falls $f'(x)$ an einer der Stellen $x = t_j$ nicht existiert, definieren wir dort $f'(x)$ als eine beliebige komplexe Zahl.²⁵

Bemerkung 14.9 Der Differentiationssatz bleibt gültig, wenn f stückweise stetig differenzierbar und absolut integrierbar ist, mit absolut integrierbarer Ableitung f' . Im Beweis sind nur kleinere Änderungen nötig.

Eigenschaften von Fourier-Transformierten

Wir erwähnen, dass die Fouriertransformierten der von uns betrachteten Funktionen immer stetige Funktionen sind, die “im Unendlichen verschwinden.”

14.10 Für jede absolut integrierbare, stückweise stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

- (a) Die Fourier-Transformierte $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion.
- (b) Für $s \rightarrow \infty$ gilt $\hat{f}(s) \rightarrow 0$. Ebenso für $s \rightarrow -\infty$.

Nachweis der Eigenschaften

Die folgenden Argumente werden in der Vorlesung nur skizziert; sie sind nicht prüfungsrelevant.

Beweis von (a). Es sei $s_0 \in \mathbb{R}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$ derart, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_R^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon/5 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt \leq \varepsilon/5.$$

Da die Funktion $\mathbb{R} \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $(s, t) \mapsto f(t) e^{-its}$ stetig ist, ist nach dem Satz über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale (siehe 11.17 in Prof.

²⁵In den Werken von Burg-Haf-Wille wird ein allgemeinerer Begriff stückweise glatter Funktionen benutzt; diese sind nicht notwendig stetig.

Glöckners Skript “Mathematik 2 für Maschinenbauer” vom SoSe 2022) auch die Funktion

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f(t) e^{-its} dt$$

stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|h(s) - h(s_0)| \leq \varepsilon/5 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ mit } |s - s_0| < \delta.$$

Für diese s ist dann

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s) - \hat{f}(s_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{-R} f(t) e^{-its} dt + \int_{-R}^R f(t) e^{-its} dt + \int_R^{\infty} f(t) e^{-its} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{-R} f(t) e^{-its_0} dt - \int_{-R}^R f(t) e^{-its_0} dt - \int_R^{\infty} f(t) e^{-its_0} dt \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f(t) e^{-its} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R f(t) e^{-its_0} dt \right|}_{\leq \varepsilon/5} \\ &\quad + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt + 2 \frac{1}{2\pi} \int_R^{\infty} |f(t)| dt \\ &\leq 5 \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Zum Nachweis von 14.10 (b) benötigen wir, dass sich stetige Funktionen auf Intervallen durch Treppenfunktionen (stückweise konstante Funktionen) approximieren lassen.

14.11 *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.*

- (a) *Ist f stetig, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ und eine auf jedem der Intervalle $]t_{j-1}, t_j[$ konstante Funktion g derart, dass $|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$.*
- (b) *Ist f stückweise stetig, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ und eine auf jedem der Intervalle $]t_{j-1}, t_j[$ konstante Funktion g derart, dass*

$$|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_m\}.$$

Man kann dann g als Linearkombination $g = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{]t_{j-1}, t_j]}$ charakteristischer Funktionen wählen.

Beweis. (a) Nach 7.52 in Prof. Glöckners Skript "Mathematik 2 für Maschinenbauer" vom SoSe 2022 ist die stetige Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \text{ mit } |y - x| \leq \delta.$$

Wählen wir $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ derart,²⁶ dass $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so gilt $|t - t_{j-1}| \leq \delta$ für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$ und somit $|f(t) - f(t_{j-1})| \leq \varepsilon$. Definieren wir

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

durch $g(t) := f(t_j)$ für $t \in [t_{j-1}, t_j[$ mit $j \in \{1, \dots, m\}$ und $g(b) := f(b)$, so ist also $|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$.

(b) Da f stückweise stetig ist, gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ und stetige Funktionen $f_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$ derart, dass

$$f|_{]t_{j-1}, t_j[} = f_j|_{]t_{j-1}, t_j[}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es nach (a) für jedes $j \in \{1, \dots, \ell\}$ eine stückweise stetige Funktion $g_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $|f_j(t) - g_j(t)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Indem wir die Zerlegung durch Einfügen weiterer Zwischenstellen verfeinern, dürfen wir annehmen, dass jedes g_j konstant ist, $g_j(t) = \alpha_j$ mit einer komplexen Zahl α_j . Wir setzen

$$g(t) := \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{[t_{j-1}, t_j]}.$$

Ist $t \in [a, b] \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, so ist $t \in]t_{j-1}, t_j[$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ und $t \notin [t_{i-1}, t_i]$ für alle $i \neq j$, somit

$$g(t) = \alpha_j = g_j(t)$$

und folglich wie gewünscht

$$|f(t) - g(t)| = |f_j(t) - g_j(t)| \leq \varepsilon.$$

²⁶Zum Beispiel eine äquidistante Zerlegung mit $t_j = a + \frac{j}{m}(b - a)$ und m so groß, dass $\frac{1}{m} \leq \delta$.

14.12 Beweis von 14.10 (b). Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$ derart, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_R^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon/4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^R |f(t)| dt \leq \varepsilon/4. \quad (74)$$

Nach 14.11 (b) gibt eine Zerlegung

$$-R = t_0 < t_1 < \dots < t_m = R$$

des Intervalls $[-R, R]$ und komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ derart, dass

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{8R} \quad (75)$$

für alle bis auf endlich viele $t \in [-R, R]$ für

$$g := \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{[t_{j-1}, t_j]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^R f(t) e^{-its} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R (f(t) - g(t)) e^{-its} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R g(t) e^{-its} dt + \frac{1}{2\pi} \int_R^\infty f(t) e^{-its} dt. \end{aligned}$$

Der Betrag des ersten Summanden und des letzten Summanden ist $\leq \frac{\varepsilon}{4}$, nach (74). Der Betrag des zweiten Summanden ist $\leq \frac{\varepsilon}{4}$, nach (75). Der dritte Summand ist gleich $\hat{g}(s)$. Für große $|s|$ ist nach (73)

$$\hat{g}(s) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathcal{F}(1_{[t_{j-1}, t_j]})(s) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{1}{\pi i s} e^{-i \frac{t_{j-1} + t_j}{2} s} \sin\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2} s\right).$$

Da $1/s \rightarrow 0$ für $|s| \rightarrow \infty$, geht der Betrag dieses Ausdrucks gegen 0 für $|s| \rightarrow \infty$. Wir finden also ein $r > 0$ derart, dass

$$|\hat{g}(s)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| \geq r$. Nach dem Vorigen ist dann $|\hat{f}(s)| \leq 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

Rücktransformation

14.13 (Fouriersche Umkehrtransformation). Ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stückweise stetige Funktion, so definieren wir $\mathcal{F}^{-1}(g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ via

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{its} ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Indem wir i durch $-i$ ersetzen und den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ vor Integralen weglassen, sehen wir analog zu 14.5, 14.7 und 14.6:

14.14 (Eigenschaften der Fourierschen Umkehrtransformation).

(a) (Linearität) Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbare, stückweise stetige Funktionen, so gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}^{-1}(f) + \beta \mathcal{F}^{-1}(g).$$

(b) (Verschiebung). Ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stückweise stetig, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^{-1}(g(s - a))(t) = e^{iat} \mathcal{F}^{-1}(g)(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ebenso gilt:

(c) (Verschiebung im Bild) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-isa} g(s))(t) = \mathcal{F}^{-1}(g)(t - a) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(d) (Ähnlichkeitssatz) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(g(s/a)) = |a| \mathcal{F}^{-1}(g)(at) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(e) (Umkehrtransformation einer Glockenkurve). Für alle $c > 0$ gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-cs^2})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{t^2}{4c}} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wie in (71) angekündigt, wollen wir genügend schöne Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ aus ihrer Fourier-Transformierten zurückgewinnen und wie folgt als Überlagerung harmonischer Schwingungen beschreiben:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{its} ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

so dass also $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ ist. Dies gelingt für sogenannte *schnell fallende* Funktionen. Anschließend lernen wir eine Variante für allgemeinere Funktionen kennen.

14.15 Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn f beliebig oft differenzierbar ist und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die k te Ableitung $f^{(k)}$ die Bedingung

$$\|f\|_{k,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^m) |f^{(k)}(x)| < \infty$$

erfüllt für alle $m \in \mathbb{N}_0$, also

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f^{(k)}(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^m}$$

gilt mit $C = \|f\|_{k,m}$.

Beispiel 14.16 Für alle $c > 0$ ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{-cx^2}$$

schnell fallend, denn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x^n e^{-cx^2} \rightarrow 0$$

für $|x| \rightarrow \infty$, so dass die Funktion $x \mapsto x^n e^{-cx^2}$ beschränkt ist und folglich auch $x \mapsto p(x) e^{-cx^2}$ für jedes Polynom p . Per Induktion ist die k te Ableitung von der Form

$$f^{(k)}(x) = p_k(x) e^{-cx^2}$$

mit einem Polynom p_k . Die Funktionen $(1 + x^m) f^{(k)}(x) = (1 + x^m) p_k(x) f(x)$ und $(1 - x^m) f^{(k)}(x) = (1 - x^m) p_k(x) f(x)$ sind also beschränkt, folglich auch $(1 + |x|^m) f^{(k)}(x)$.

Ähnlich sieht man, dass für alle $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{-c(x-a)^2}$ schnell fallend ist.

Bemerkung 14.17 Jede schnell fallende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist absolut integrierbar.

Dies folgt mit dem Majorantenkriterium: Es ist $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$ mit $C := \|f\|_{0,2}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+x^2} dx < \infty$.

14.18 (Umkehrsatze für die Fouriertransformation auf schnell fallenden Funktionen). Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ schnell fallend, so ist auch \hat{f} schnell fallend und es gilt

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{its} ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Eine Beweisskizze geben wir im folgenden Abschnitt. Mit einem vollständigen Beweis finden Sie das Ergebnis auch als Satz 8.1 im Differentialgleichungsband von Burg-Haf-Wille.

Bemerkung 14.19 Es sei $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der komplexe Vektorraum aller schnell fallenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Wir werden sehen, dass die Abbildung

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \hat{f}$$

bijektiv ist und die Umkehrabbildung durch die Fouriersche Umkehrtransformation \mathcal{F}^{-1} aus 14.13 gegeben ist.

Ohne Beweisskizze formulieren wir noch einen Spezialfall von Satz 8.2 im Differentialgleichungsband von Burg-Haf-Wille:

14.20 (Umkehrsatze für die Fouriertransformation auf stückweise stetig differenzierbaren Funktionen). Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stückweise stetig differenzierbar im Sinne von 14.8, so gilt

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(s) e^{its} ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweisskizze für den Umkehrsatz, Satz 14.18

Schritt 1. Für jede Glockenkurve $f(t) = e^{-Ct^2}$ gilt $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$.

Nach 14.6 ist nämlich

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\sqrt{C\pi}} e^{-\frac{s^2}{4C}} = \frac{1}{2\sqrt{C\pi}} e^{-cs^2}$$

mit $c := \frac{1}{4C}$. Nach 14.14 (a) und (e) ist also

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t) &= \frac{1}{2\sqrt{C\pi}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-cs^2})(t) = \frac{1}{2\sqrt{C\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-\frac{t^2}{4c}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{C\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/(4C)}}e^{-\frac{t^2}{4/(4C)}} = e^{-Ct^2} = f(t).\end{aligned}$$

Schritt 2. Es sei nun $V \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Untervektorraum aller Linearkombinationen

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-C_j(t-a_j)^2}$$

von verschobenen Glockenkurven, mit $C_j > 0$ und $a_j \in \mathbb{R}$. Wir zeigen:

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ für alle $f \in V$.

Wegen der Linearität von \mathcal{F} (siehe 14.5) und \mathcal{F}^{-1} (siehe 14.14 (a)) genügt es, dies für $f(t) = e^{-C(t-a)^2}$ zu zeigen. Mit $g(t) = e^{-Ct^2}$ gilt

$$\hat{f}(s) = e^{-ias}\hat{g}(s)$$

nach 14.7 (a) und somit

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-ias}\hat{g}(s)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(t-a) = g(t-a) = f(t)$$

unter Benutzung von 14.14 (c), wobei $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = g$ nach Schritt 1.

Schritt 3. *Für jede schnell fallende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ schnell fallend.*

Dies ist Teil (i) des Beweises von Satz 8.1 im Differentialgleichungsband von Burg-Haf-Wille.

Analog ist $\mathcal{F}^{-1}(f)$ schnell fallend.

Wir erwähnen zwei Fakten ohne Beweis:

Schritt 4. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ schnell fallend. Wir nennen eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schnell fallender Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ *konvergent gegen f* , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{k,m} = 0$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$. Man zeigt:

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ ist stetig, d.h. es gilt

$$\mathcal{F}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n)$$

für alle konvergenten Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ebenso ist $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stetig.

Schritt 5. Man zeigt:

Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Schritt 6. Nun kann man den Beweis wie folgt beenden: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ wählen wir eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, wie in Schritt 5. Nach Schritt 2 gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) = f_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Schritt 4 ist also

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f. \end{aligned}$$

Also gilt 14.18. Analog sieht man, dass $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f$. Also ist die Abbildung

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

bijektiv und die Umkehrfunktion dieser Abbildung \mathcal{F} ist die Fouriersche Umkehrtransformation \mathcal{F}^{-1} als Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (was auch Bemerkung 14.19 etabliert).

15 Differentialgleichungen: Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen

Bisher haben wir vor allem lineare Differentialgleichungen betrachtet (mit Ausnahme von Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen). Viele in der Praxis wichtige Differentialgleichungen sind jedoch nicht linear. In diesem Kapitel stellen wir einige Grundtatsachen über allgemeine (nicht notwendig lineare) Differentialgleichungen bereit. Für solche Differentialgleichungen ist es oft nicht möglich, Lösungen explizit in Formeln anzugeben. Sie existieren jedoch unter geeigneten Bedingungen und können am Computer wenigstens näherungsweise berechnet werden (siehe Kapitel 16). Im vorliegenden Kapitel legen wir Grundlagen für die numerische Behandlung.

Lokale Eindeutigkeit von Lösungen

Unser Hauptziel ist der folgende Eindeutigkeitssatz (dessen Voraussetzungen anschließend erläutert werden) und die folgende Bemerkung 15.2.

15.1 (Lokale Eindeutigkeit). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und*

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto f(t, y)$$

eine Funktion, die eine globale (oder lokale) Lipschitzbedingung erfüllt. Weiter seien $\phi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\phi_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Ist $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gibt es ein $r > 0$ derart, dass

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) \quad \text{für alle } t \in I_1 \cap I_2 \text{ mit } |t - t_0| \leq r.$$

Bemerkung 15.2 *In der Situation von 15.1 gilt sogar*

$$\phi_1|_{I_1 \cap I_2} = \phi_2|_{I_1 \cap I_2}.$$

Hierbei wurde folgende Terminologie benutzt, die für die Theorie von Differentialgleichungen ganz wesentlich ist.

15.3 Es sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass eine Funktion

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto f(t, y)$$

eine *Lipschitzbedingung* erfüllt, wenn für eine reelle Konstante $L \geq 0$

$$|f(t, z) - f(t, y)| \leq L |z - y| \quad \text{für alle } (t, y), (t, z) \in U.$$

Gibt es für alle $(t_0, y_0) \in U$ ein $\delta > 0$ derart, dass f auf der Menge

$$\{(t, y) \in U : |(t, y) - (t_0, y_0)| < \delta\}$$

eine Lipschitzbedingung erfüllt, so sagt man, f erfülle eine *lokale Lipschitzbedingung*.

Zur Betonung nennt man eine Lipschitzbedingung auch eine *globale Lipschitzbedingung*.

Bemerkung 15.4 Lipschitzbedingungen sind wichtig für die Theorie von Differentialgleichungen, da sie für lokale und globale Existenzaussagen für Lösungen von Anfangswertproblemen genutzt werden können, sowie für lokale Eindeutigkeit.

Beispiel 15.5 Für gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t),$$

die uns im Falle $\lambda > 0$ als einfaches Populationsmodell, im Falle $\lambda < 0$ beim radioaktiven Zerfall begegnet ist. Die Differentialgleichung lautet also

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

mit der Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto \lambda y.$$

Dann erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung mit Konstante $L := |\lambda|$. Für alle $y, z \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$|f(t, z) - f(t, y)| = |\lambda z - \lambda y| = |\lambda(z - y)| = |\lambda| |z - y| \leq |\lambda| |z - y|.$$

Die rechten Seiten von linearen Differentialgleichungen auf Intervallen $[c, d]$ erfüllen ebenfalls stets eine globale Lipschitzbedingung. Bevor wir dies formulieren, erinnern wir an eine Notation:

15.6 Wir erinnern an den aus der Mathematik 2 bekannten Begriff der Supremumsnorm: Ist X eine Menge und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Funktion (also $f(X)$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n), so schreibt man

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \in [0, \infty[.$$

Aus der Mathematik 2 ist uns zudem die folgende Abschätzung der Operatornorm bekannt (siehe 7.18 dort):

15.7 Für jede quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\|A\|_{\text{op}} \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

Beispiel 15.8 Wir betrachten ein lineares Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

mit reellen Zahlen $c < d$ und stetigen Funktionen

$$A: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$$

und $b = (b_1, \dots, b_n): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dieses ist also von der Form

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

mit

$$f: [c, d] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto A(t)y + b(t).$$

Dann ist

$$L := \sup_{t \in [c, d]} \|A(t)\|_{\text{op}} < \infty$$

und es erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung mit der genannten Konstante L .

In der Tat gilt für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [c, d]$

$$|f(t, z) - f(t, y)| = |A(t)z - A(t)y| = |A(t)(z - y)| \leq \|A(t)\|_{\text{op}} |z - y| \leq L |z - y|$$

mit L wie oben. Hierbei ist L endlich, was sich wie folgt einsehen lässt: Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist die Funktion $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto |a_{ij}(t)|$ stetig, also

$$\|a_{ij}\|_\infty := \sup\{|a_{ij}(t)| : t \in [c, d]\} < \infty$$

nach dem Satz vom Maximum (siehe zum Beispiel Satz 7.48 der Mathematik 2). Wegen 15.7 ist somit

$$\|A(t)\|_{\text{op}} \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{\infty}.$$

Die rechte Seite ist eine obere Schranke für alle t . Die linke Seite ist also beschränkt und das Supremum L endlich.

Die rechten Seiten praxisrelevanter Differentialgleichungen sind meist stetig differenzierbar; eine lokale Lipschitzbedingung ist dann automatisch erfüllt (wir wir uns nun klarmachen) und somit lokale Eindeutigkeit von Lösungen garantiert.

15.9 *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann gilt:*

(a) *Besitzt eine stetige Funktion*

$$f: J \times V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto f(t, y)$$

die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ und sind diese stetig, so erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung. Insbesondere erfüllt jede C^1 -Funktion eine lokale Lipschitzbedingung.

(b) *Ist zudem V konvex (zum Beispiel also V eine offene Kugel oder ganz \mathbb{R}^n) und jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ eine beschränkte Funktion, so erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung.*

15.10 Beweis von 15.9. (b) Seien $(t, y), (t, z) \in V$. da V konvex ist, ist dann $y + s(z - y) \in V$ für alle $s \in [0, 1]$. Anwendung des Mittelwertsatzes (13.9 im Skript zur Mathematik 2) auf die C^1 -Funktion $f(t, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}^n$ liefert

$$f(t, z) - f(t, y) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y + s(z - y))(z_j - y_j) ds,$$

so dass also

$$|f(t, z) - f(t, y)| \leq \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y + s(z - y)) \right| \underbrace{|z_j - y_j|}_{\leq |z - y|} ds \leq L |z - y|$$

mit

$$L := \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial y_j} \right\|_{\infty}.$$

(a) (In der Vorlesung übersprungen). Da die partiellen Ableitungen stetig angenommen sind, gibt es für alle $(t_0, y_0) \in U$ ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(t_0, y_0) \right| < 1$$

für alle $(t, y) \in J \times V$ mit $|(t, y) - (t_0, y_0)| < 2\delta$. Diese Bedingung ist erfüllt für alle $(t, y) \in I \times W$ mit

$$I := \{t \in J : |t - t_0| < \delta\} \quad \text{und} \quad W := \{y \in V : |y - y_0| < \delta\}.$$

Die partiellen Ableitungen sind auf $I \times W$ somit beschränkt. Nach (b) erfüllt also f auf $I \times W$ eine Lipschitzbedingung und somit auch auf

$$\{(t, y) \in J \times V : |(t, y) - (t_0, y_0)| < \delta\} \subseteq I \times W.$$

Also erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung.

Beweis der Eindeutigkeitsaussagen

Die folgenden Beweise bis 15.13 sind nicht prüfungsrelevant.

15.11 Beweis von 15.1. Es sei $y_0 := \phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$. Wir nehmen zunächst an, dass f eine globale Lipschitzbedingung erfüllt mit Konstante L . Gibt es ein $t > t_0$ in $I_1 \cap I_2$, so gibt es ein $r > 0$ derart, dass $[t_0, t_0 + r] \subseteq I_1 \cap I_2$. Nach Verkleinern dürfen wir annehmen, dass

$$rL < 1.$$

Wir setzen

$$M := \sup\{|\phi_2(t) - \phi_1(t)| : t \in [t_0, t_0 + r]\}.$$

Dann ist $M \geq 0$. Für alle $t \in [t_0, t_0 + r]$ gilt

$$\phi_j(t) = \phi_j(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_j'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_j(s)) ds$$

für $j \in \{1, 2\}$ und somit

$$\begin{aligned} |\phi_1(t) - \phi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi_2(s)) - f(s, \phi_1(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, \phi_2(s)) - f(s, \phi_1(s))|}_{\leq L|\phi_2(s) - \phi_1(s)| \leq LM} ds \\ &\leq \int_{t_0}^t LM ds = LM(t - t_0) \leq rLM. \end{aligned}$$

Bildung des Supremums über all $t \in [t_0, t_0 + r]$ liefert

$$M \leq rLM,$$

also $(1 - rL)M \leq 0$ und somit $M \geq 0$, also $M = 0$, somit $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0 + r]$. Gibt es ein $t < t_0$ in $I_1 \cap I_2$, so dürfen wir nach Verkleinern von r annehmen, dass $t_0 - r \in I_1 \cap I_2$ und sehen ähnlich zum Vorigen, dass $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ für alle $t \in [t_0 - r, t_0]$.

15.12 Nun nehmen wir lediglich an, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt (dieser Fall wurde in der Vorlesung übersprungen). Es gibt dann ein $\delta > 0$ derart, dass f auf der Menge

$$U' := \{(t, y) \in U : |(t, y) - (t_0, y_0)| < \delta\}$$

eine Lipschitzbedingung erfüllt mit Konstante $L \geq 0$. Da ϕ_1 und ϕ_2 stetig sind, können wir $r \in]0, \delta/2[$ so klein wählen, dass für $j \in \{1, 2\}$

$$|\phi_j(t) - y_0| < \delta/2$$

für alle $t \in I_j$ mit $|t - t_0| \leq r$. Sei I'_j die Menge dieser t . Dann ist $(t, \phi_j(t)) \in U'$ für alle $t \in I'_j$. Wir können also 15.11 auf $\phi_1|_{I'_1}$, $\phi_2|_{I'_2}$ und $f|_{U'}$ statt f anwenden.

15.13 Details für Bemerkung 15.2: Es genügt zu zeigen, dass $\phi_1|_{[t_0, t_0+T]} = \phi_2|_{[t_0, t_0+T]}$ für alle $T > 0$ mit $t_0 + T \in I_1 \cap I_2$ und $\phi_1|_{[t_0-T, t_0]} = \phi_2|_{[t_0-T, t_0]}$ für alle $T > 0$ mit $t_0 - T \in I_1 \cap I_2$. Wir zeigen Ersteres (die zweite Aussage lässt sich sehr ähnlich beweisen). Wir setzen

$$\tau := \sup\{t \in]t_0, t_0 + T] : \phi_1|_{[t_0, t]} = \phi_2|_{[t_0, t]}\}.$$

Es gibt eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in der Menge M , über die wir das Supremum bilden, die gegen das Supremum τ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von ϕ_1 und ϕ_2 ist dann

$$\phi_1(\tau) = \phi_1\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\phi_1(t_k)}_{=\phi_2(t_k)} = \phi_2(\tau),$$

also $\tau \in M$. Wäre $\tau < t_0 + T$, so gäbe es aufgrund der lokalen Eindeutigkeit ein $r > 0$ derart, dass $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$ mit $|t - \tau| \leq r$. Nun ist

$$\theta := \min\{\tau + r, t_0 + T\} > \tau$$

und nach dem Vorigen $\theta \in M$, im Widerspruch zu $\tau = \sup M$. Also muss doch $\tau = t_0 + T$ sein und somit gilt $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Globale Existenz von Lösungen

Im Falle von stetigen Funktionen auf Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ garantiert eine globale Lipschitzbedingung die Existenz von auf ganz $[a, b]$ definierten Lösungen von Anfangswertproblemen.

15.14 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz). *Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllt. Dann gilt:*

- (a) Für jedes $t_0 \in [a, b]$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

eine auf ganz $[a, b]$ definierte Lösung $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (b) Für jede andere Lösung $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems aus (a) gilt $\psi = \phi|_I$.

- (c) Bezeichnet $\phi_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die konstante Funktion $t \mapsto y_0$ und definiert man rekursiv $\phi_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ via

$$\phi_k(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{k-1}(s)) ds$$

für $k \in \mathbb{N}$, so gilt für jedes $t \in [a, b]$

$$\phi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t).$$

Bemerkung 15.15 Man nennt (15.14) auch den globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz *von Picard-Lindelöf*. Das Iterationsverfahren aus (c) nennt man auch *Picard-Iteration*.

Beispiel 15.16 Gegeben $R > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir auf dem Intervall $[-R, R]$ das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0,$$

also $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ mit $t_0 = 0$ und der stetigen Funktion

$$f: [-R, R] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto \lambda y,$$

die nach Beispiel 15.5 eine globale Lipschitzbedingung erfüllt. Setzen wir $\phi_0(t) := y_0$ für alle $t \in [-R, R]$, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_k(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{k-1}(s)) ds = y_0 + \int_0^t \lambda \phi_{k-1}(s) ds,$$

insbesondere also

$$\phi_1(t) = y_0 + \int_0^t \lambda y_0 ds = y_0 + \lambda t y_0$$

und

$$\phi_2(t) = y_0 + \int_0^t (\lambda y_0 + \lambda^2 s y_0) ds = y_0 + \lambda t y_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 y_0.$$

Wir vermuten nun und bestätigen per Induktion, dass

$$\phi_k(t) = y_0 \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j t^j}{j!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ haben wir dies schon und für $k \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} \phi_k(t) &= y_0 + \int_0^t \lambda \phi_{k-1}(s) ds = y_0 + y_0 \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{j+1} \underbrace{\int_0^t \frac{s^j}{j!} ds}_{=t^{j+1}/(j+1)!} \\ &= y_0 + y_0 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!} = y_0 \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j t^j}{j!}, \end{aligned}$$

was den Induktionsbeweis beendet. Es ist also

$$\phi_k(t) = y_0 \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

mit Limes $y_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = y_0 e^{\lambda t}$ für $k \rightarrow \infty$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $\phi(t) = y_0 e^{\lambda t}$.

Sind $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschränkte Funktionen, so ist es naheliegend, die Supremumsnorm $\|f - g\|_{\infty}$ als den Abstand von f und g zu interpretieren. Dies motiviert die folgende Definition:

15.17 Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Funktion. Wir sagen, die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *konvergiert gleichmäßig gegen f* , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\infty} = 0.$$

Bemerkung 15.18 Für jedes $\varepsilon > 0$ muss also ein $N \in \mathbb{N}_0$ existieren derart, dass für alle $k \geq N$

$$\|f_k - f\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

also für alle $t \in [a, b]$ die Ungleichung $|f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ erfüllt ist. Man beachte, dass N von ε abhängt, aber nicht von t .

Bemerkung 15.19 Der Beweis wird zeigen, dass die Näherungslösungen ϕ_k aus 15.14 (c) gleichmäßig gegen die Lösung ϕ des Anfangswertproblems konvergieren, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi\|_{\infty} = 0$$

gilt (siehe (85)).

Für den Beweis des globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes (und viele andere Zwecke) ist es nützlich, dass Lösungen von Anfangswertproblemen Lösungen geeigneter Integralgleichungen entsprechen.

15.20 (Umschreiben einer Differentialgleichung als Integralgleichung). *Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Für eine stetige Funktion $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind dann folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) ϕ ist stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

(b) Für alle $t \in [a, b]$ gilt $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$.

Beweis: Ist ϕ stetig differenzierbar und löst das Anfangswertproblem, so gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \phi'(s) ds$$

für alle $t \in [a, b]$. Da ϕ das Anfangswertproblem löst, ist in dieser Formel $\phi(t_0) = y_0$ und $\phi'(s) = f(s, \phi(s))$, wir erhalten also die Integralgleichung

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Umgekehrt sei nun angenommen, dass ϕ die Integralgleichung erfüllt. Da der Integrand

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad s \mapsto f(s, \phi(s))$$

stetig ist, ist nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung die Funktion

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$$

differenzierbar mit Ableitung $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto f(t, \phi(t))$. Also hat auch $\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$ die Ableitung $f(t, \phi(t))$. Da das Integral von t_0 bis $t = t_0$ verschwindet, ist weiter $\phi(t_0) = y_0$, das Anfangswertproblem aus (a) also erfüllt.

15.21 Ist $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, so ist auch die Funktion $I_f(\phi): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$t \mapsto I_f(\phi)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$$

stetig (und sogar stetig differenzierbar). Wir erhalten also eine Abbildung

$$I_f: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n), \quad \phi \mapsto I_f(\phi)$$

(einen sogenannten *Integraloperator*). Eine stetige Funktion $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllt nach 15.20 genau das dortige Anfangswertproblem, wenn ϕ ein Fixpunkt der Abbildung I_f ist, also $I_f(\phi) = \phi$.

Genauer könnten wir I_{f,t_0,y_0} schreiben, da I_f von t_0 und y_0 abhängt; wir halten t_0 und y_0 jedoch fest.

Einen Beweis des globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes finden Sie (bei Interesse) in Anhang A.

16 Differentialgleichungen: Numerische Lösung

In der Praxis ist es häufig nicht möglich, eine Differentialgleichung explizit zu lösen; jedoch kann die Lösung wenigstens näherungsweise am Computer berechnet werden, mit beliebiger Genauigkeit. In diesem Kapitel lernen wir zwei numerische Lösungsverfahren kennen, welche Näherungslösungen für Anfangswertprobleme liefern. Das einfachste Verfahren ist das Eulersche Polygonzugverfahren (oder kurz: *Eulerverfahren*). Es ist leicht zu implementieren und leicht mathematisch zu analysieren. Für die Praxis besser geeignet sind jedoch andere Verfahren, die mit weniger Rechenaufwand große Genauigkeit liefern. Wir gehen kurz auf ein sogenanntes *Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung* ein.

Das Eulerverfahren

Wir betrachten folgende Situation.

16.1 Es seien $a < b$ reelle Zahlen und

$$f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass f und alle partiellen Ableitungen von f beschränkt sind. Nach 15.9 erfüllt dann f eine globale Lipschitzbedingung,²⁷ mit einer Konstanten $L \geq 0$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz (siehe 15.14) hat somit für alle $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{76}$$

eine eindeutige auf ganz $[a, b]$ definierte Lösung

$$\phi_{t_0, y_0}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wir halten t_0 und y_0 fest und interessieren uns für die Lösung $\phi := \phi_{t_0, y_0}$.

Wenn wir die Lösung ϕ noch nicht explizit kennen, wie können wir sie näherungsweise berechnen, etwa an einer Stelle $t_0 + T \in [a, b]$ mit $T > 0$?

²⁷Allgemeiner würde es genügen, f stetig anzunehmen und eine globale Lipschitzbedingung vorauszusetzen.

16.2 Ein mögliches Vorgehen ist, für ein $m \in \mathbb{N}$ das Intervall $[t_0, t_0 + T]$ äquidistant zu unterteilen, also die Zwischenpunkte

$$t_k := t_0 + \frac{k}{m}T$$

einzuführen für $k \in \{0, \dots, m\}$. Dann ist t_0 wie zuvor und mit der *Schrittweite*

$$h := \frac{T}{m}$$

können wir auch

$$t_k = t_0 + kh$$

schreiben für $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Weiter ist

$$t_k = t_{k-1} + h$$

für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und

$$t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_0 + T.$$

Den Startwert $\phi(t_0) = y_0$ kennen wir. Um

$$\phi(t_1)$$

näherungsweise zu berechnen, ersetzen wir ϕ durch seine Tangente

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0), \quad (77)$$

vernachlässigen also das Restglied der affin-linearen Approximation (Taylor-Approximation 1. Ordnung) am Entwicklungspunkt t_0 . Da ϕ das Anfangswertproblem erfüllt, ist $\phi(t_0) = y_0$ und $\phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, y_0)$. Aus (77) wird somit

$$t \mapsto y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0);$$

dies liefert den Näherungswert

$$y_1 := y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

für $\phi(t_1)$. Um $\phi(t_2)$ näherungsweise zu berechnen, würden wir das Verfahren gern wiederholen, kennen aber nicht $\phi'(t_1)$ sondern nur die Ableitung

$$\phi'_{t_1, y_1}(t_1) = f(t_1, y_1)$$

für die zur Zeit t_1 durch y_1 (statt $\phi(t_1)$) laufende Lösung der Differentialgleichung. Wir begnügen uns mit diesem Näherungswert an die Tangentensteigung für ϕ und betrachten

$$y_2 := y_1 + h f(t_1, y_1)$$

als Näherungswert für $\phi(t_2)$. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ fahren wir so fort und setzen

$$y_k := y_{k-1} + h f(t_{k-1}, y_{k-1});$$

wir betrachten y_k als Näherungswert für $\phi(t_k)$. Insbesondere ist y_m ein Näherungswert für $\phi(t_m) = \phi(t_0 + T)$.

16.3 Wir können nun die Punkte $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$ durch einen Polygonzug verbinden; dieser ist der Graph der stückweise definierten stetigen Funktion

$$\eta_m: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit

$$\eta_m(t) := y_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(y_k - y_{k-1})$$

für $t \in [t_{k-1}, t_k]$ mit $k \in \{1, \dots, m\}$.

16.4 Die vorige Konstruktion können wir für beliebige m durchführen und erwarten, für große m die Lösung zunehmend gut approximieren zu können. Dies ist in der Tat wahr; wir werden sehen, dass für $m \rightarrow \infty$ die Funktionen η_m auf $[t_0, t_0 + T]$ gleichmäßig gegen die Lösung ϕ konvergieren. Insbesondere gilt

$$\phi(t_0 + T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m(t_0 + T).$$

Das Euler-Verfahren ist auch anwendbar, wenn unsere stetig differenzierbare Funktion f nicht notwendig beschränkt ist oder die partiellen Ableitungen nicht beschränkt sind. Der Konvergenzbeweis ist dann aber etwas schwieriger (siehe Bemerkung 16.16).

Beispiel 16.5 Auf $[0, 1]$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y(t), \quad y(0) = 1$$

mit der exakten Lösung $\phi(t) = e^{2t}$. Um $\phi(1)$ näherungsweise zu berechnen, wählen wir $m = 5$, so dass also

$$t_0 = 0, \quad T = 1 - 0 = 1, \quad h := \frac{T}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

und die $t_k = t_0 + kh = k \cdot 0,2$ gegeben sind durch

$$t_1 = 0,2, \quad t_2 = 0,4, \quad t_3 = 0,6, \quad t_4 = 0,8 \quad \text{und} \quad t_5 = 1.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung wird durch die Funktion $f(t, y) = 2y$ beschrieben. Mit $y_0 = 1$ ist

$$y_k = y_{k-1} + h f(t_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + \frac{2}{5} y_{k-1} = \frac{7}{5} y_{k-1}$$

für $k \in \{1, \dots, m\}$, somit

$$y_k = (7/5)^k y_0 = (7/5)^k.$$

Insbesondere ist $y_m = (7/5)^m$. Hierbei ist $7/5 = 1,4$. Der korrekte Wert der Lösung ist

$$\phi(t_k) = \phi(k/5) = e^{k \frac{2}{5}} = (e^{2/5})^k$$

mit $e^{2/5} = 1,4918246976 \dots$

Das Euler-Verfahren ist nicht besonders gut. Das folgende Beispiel veranschaulicht das Problem.

Beispiel 16.6 Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$$

auf \mathbb{R}^2 und das Anfangswertproblem

$$y'(t) = F(y(t)), \quad y(0) = (1, 0)$$

für $t \in [0, 5]$. Dann ist also $t_0 = 0$ und $f(t, y) := F(y)$ für $(t, y) \in [0, 5] \times \mathbb{R}^2$. Mit der Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

um $\pi/2$ ist $F(y) = Dy$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ (wenn wir y als Spaltenvektor auffassen). Wir wenden ein Eulerverfahren an mit $T := 5$ und $m = 10$, so dass also $h = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ und

$$t_k = kh = \frac{k}{2} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, 10\}.$$

Dann ist $y_0 = (1, 0)$ und für alle $k \in \{1, \dots, 10\}$

$$y_k = y_{k-1} + h f(t_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + \frac{1}{2} Dy_{k-1}.$$

Da die Vektoren y_{k-1} und $\frac{1}{2} Dy_{k-1}$ orthogonal sind, ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|y_k|^2 = |y_{k-1}|^2 + |(1/2)Dy_{k-1}|^2 = |y_{k-1}|^2 + \frac{1}{4} \underbrace{|Dy_{k-1}|^2}_{=|y_{k-1}|^2} = \frac{5}{4}|y_{k-1}|^2;$$

die Drehung lässt nämlich die Länge eines Vektors unverändert. Also gilt

$$|y_k| = \frac{\sqrt{5}}{2}|y_{k-1}|$$

und per Induktion

$$|y_k| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^k |y_0| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

was mit k stark wächst; insbesondere ist

$$|y_{10}| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = (1,11803\dots)^{10} = 3,0517578\dots$$

Die exakte Lösung des Anfangswertproblems ist jedoch

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t)$$

für alle $t \in [0, 5]$ mit $|\phi(t)| = 1$ für alle $t \in [0, 5]$.

Konvergenz des Eulerverfahrens

Wir betrachten zunächst den ersten Schritt des Euler-Verfahrens und wollen die Abweichung zwischen y_1 und dem korrekten Wert $\phi(t_1)$ nach oben abschätzen.

Hier seien $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie zuvor, $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $\phi := \phi_{t_0, y_0}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Weiter sei $t \in [a, b]$ gegeben (wobei nun auch $t < t_0$ zulässig ist), $m \in \mathbb{N}$ gegeben, $T := t - t_0$, $h := \frac{T}{m} = \frac{t-t_0}{m}$,

$$t_k := t_0 + kh \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, m\}$$

und $y_k := y_{k-1} + h f(t_{k-1}, y_{k-1})$ für $k \in \{1, \dots, m\}$.

16.7 Da f beschränkte partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ besitzt für $j \in \{1, \dots, n\}$, ist f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$ (vgl. A.4). Mit $t_1 = t_0 + h$ ist nach (15.20)

$$\phi(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s)) ds.$$

Weiter ist

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0, y_0) ds,$$

also

$$|y_1 - \phi(t_1)| = \left| \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0, y_0) - f(s, \phi(s)) ds \right| \leq |h| \sup_s |f(t_0, y_0) - f(s, \phi(s))|. \quad (78)$$

Um (78) abzuschätzen, beachten wir, dass für jedes τ zwischen t_0 und $t_1 = t_0 + h$

$$\phi(\tau) = y_0 + \int_{t_0}^{\tau} f(s, \phi(s)) ds,$$

gilt, so dass also

$$|\phi(\tau) - y_0| \leq M|\tau| \leq M|t_1 - t_0| = M|h|$$

mit $M := \|f\|_{\infty}$. Für jedes s zwischen t_0 und t_1 ist dann

$$|f(t_0, y_0) - f(s, \phi(s))| \leq L\sqrt{(s - t_0)^2 + (\phi(s) - y_0)^2} \leq \sqrt{|h|^2 + M^2|h|^2} \leq C|h|$$

mit $C := \sqrt{1 + M^2}$. Wir können (78) also weiter abschätzen durch

$$|y_1 - \phi(t_1)| \leq C |h|^2,$$

wobei C unabhängig von t_0 , y_0 und h ist. Schreiben wir

$$\sigma(t_0, y_0, h) := y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0),$$

so gilt also

$$|\sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t_0 + h)| \leq C |h|^2 \quad (79)$$

für alle $(t_0, y_0, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$.

16.8 Die weiteren Werte y_2, \dots, y_m erhalten wir nun via

$$y_k = \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, h)$$

für $k \in \{1, \dots, m\}$.

Wir sehen, dass das Eulerverfahren ein Einschrittverfahren erster Ordnung ist im Sinne der folgenden Definition.

16.9 Gegeben sei eine stetige Funktion $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllt (letzteres gilt zum Beispiel, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ existieren und stetige, beschränkte Funktionen sind). Ein *Einschrittverfahren* für f ist festgelegt durch die Angabe von Vektoren

$$\sigma(t_0, y_0, h) \in \mathbb{R}^n$$

für alle $(t_0, y_0, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$, wobei

$$\sigma(t_0, y_0, 0) = y_0$$

gelten soll für alle $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $p \in \mathbb{N}$. Gibt es eine reelle Konstante $C \geq 0$ derart, dass

$$|\sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t_0 + h)| \leq C |h|^{p+1}$$

für alle $(t_0, y_0, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$, so sprechen wir von einem *Einschrittverfahren pter Ordnung*.

Bemerkung 16.10 Für viele Zwecke würde es genügen, nur zu verlangen, dass $\sigma(t_0, y_0, h)$ für $h > 0$ definiert ist oder sogar nur für kleine $h > 0$. In unseren Beispielen (Eulerverfahren, Runge-Kutta-Verfahren) sind solche Verfeinerungen nicht notwendig.

Bemerkung 16.11 Traditionell schreibt man mit Landauscher groß-O-Notation auch kurz

$$|\sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t_0 + h)| = \mathcal{O}(|h|^{p+1})$$

für vorigen Sachverhalt, wir vermeiden aber die Notation.²⁸

16.12 Wie im Falle des Eulerverfahrens kann ein Einschrittverfahren mehrmals angewandt werden: Gegeben $t_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $h := \frac{t-t_0}{m}$ und

$$t_k := t_0 + k h \quad \text{für } k \in \{1, \dots, m\},$$

so dass also $t_m = t$. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ definieren wir rekursiv

$$y_k := \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, h).$$

Man kann zeigen (siehe B.1 in Anhang B):

16.13 *Definiert σ ein Einschrittverfahren der Ordnung p für f mit $p \geq 1$, so gibt es ein $h_0 > 0$ und eine reelle Konstante $K \geq 0$ derart, dass*

$$|y_k - \phi(t_k)| \leq K |h|^p$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, wenn $|h| \leq h_0$. Es sind h_0 und K unabhängig von t_0, y_0, t und m .

Beispiel 16.14 Das Eulerverfahren ist von erster Ordnung. Nach 16.13 gibt es somit ein $h_0 > 0$ und eine reelle Konstante $K \geq 0$ derart, dass

$$|y_k - \phi(t_k)| \leq K |h|$$

für alle $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, wenn $|h| < h_0$. Es sind h_0 und K unabhängig von t_0, y_0, t und m .

²⁸Die hier gleichmäßig in (t_0, y_0) zu verstehen ist.

Bemerkung 16.15 Im Fall des Eulerverfahrens haben wir die Punkte $(t_0, y_0), \dots, (t_m, y_m)$ noch durch einen Polygonzug verbunden, entsprechend einer approximativen Lösung $\eta_m: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $t_0 + T = t > t_0$). Mit einer Konstanten K' (die unabhängig von t_0, y_0, t, m und h_0 ist), gilt hier ebenfalls

$$\|\eta_m - \phi_{t_0, y_0}\|_\infty \leq K' h$$

auf $[t_0, t_0 + T]$, wenn $h \leq h_0$ (siehe B.2 in Anhang B).

Bemerkung 16.16 Wir betrachten nun eine stetig differenzierbare Funktion $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, aber nicht notwendig beschränkt ist und deren partielle Ableitungen nicht notwendig beschränkt sind. Für $(t_0, y_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ existiert eine Lösung $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (76). Sei $\delta > 0$ und $r := \|\phi\|_\infty + \delta$. Es gibt eine C^∞ -Funktion $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die eine Abschneidefunktion ist im folgenden Sinn:

- (a) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| \leq r$ ist $\chi(y) = 1$.
- (b) Es gibt ein $R > 0$ derart, dass $\phi(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| \geq R$.

Dann ist die Hilfsfunktion

$$\tilde{f}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto f(t, y)\chi(y)$$

stetig differenzierbar und beschränkt mit beschränkten partiellen Ableitungen. Da

$$\tilde{f}(t, \phi(t)) = f(t, \phi(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

löst ϕ auch das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Wir können also das Eulerverfahren auf \tilde{f} an Stelle von f anwenden und erhalten Approximationen $y_0, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ an $\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_m)$. Benutzen wir Beispiel 16.14 mit \tilde{f} statt f , so sehen wir, dass $|y_k - \phi(t_k)| < \delta$, wenn nur $K|h| < \delta$, also für kleine $|h|$. Somit ist

$$\tilde{f}(t_k, y_k) = f(t_k, y_k)$$

für $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ und somit erhalten wir die gleichen y_1, \dots, y_m bei einem Eulerverfahren mit f an Stelle von \tilde{f} .

Folgende Bemerkung wurde in der Vorlesung übersprungen.

Bemerkung 16.17 Ähnlich kann man verfahren im Falle einer C^1 -Funktion $f: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn die Existenz der Lösung $\phi := \phi_{t_0, y_0}$ auf ganz $[a, b]$ angenommen wird. Es gibt dann ein $r > 0$ derart, dass $(t, y) \in U$ für alle $t \in [a, b]$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y - \phi(t)| < r$. Wir wählen eine C^1 -Funktion $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $\xi(s) = 1$ für s nahe 0 und $\xi(s) = 0$ für $s > \frac{1}{4}r^2$. Dann ist $\tilde{f}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{f}(t, y) := \begin{cases} \xi(|y - \phi(t)|^2) f(t, y) & \text{wenn } (t, y) \in U; \\ 0 & \text{wenn } |y - \phi(t)| > \frac{r}{2} \end{cases}$$

eine C^1 -Funktion, welche beschränkt ist und beschränkte partielle Ableitungen hat. Für das gegebene t_0 und y_0 kann man für genügend kleine $|h|$ wieder erreichen, dass im Euler-Verfahren für \tilde{f} nur Paare (t_j, y_j) mit $\xi(t_j, y_j) = 1$ auftreten, also $\tilde{f}(t_j, y_j) = f(t_j, y_j)$ ist und zudem die im Verfahren auftretenden Lösungen von Anfangswertproblemen für \tilde{f} und f übereinstimmen.

Das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

Für den skalarwertigen Fall einer rechten Seite $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stellen wir ein weiteres Einschrittverfahren vor, das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung.

16.18 Bis auf Weiteres seien $a < b$ reelle Zahlen und $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine fünfmal stetig differenzierbare Funktion, so dass f und alle partiellen Ableitungen von f bis zur 5. Ordnung beschränkte Funktionen sind.

16.19 (Das Verfahren) Gegeben $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (80)$$

Dann ist also $\phi(t_0) = y_0$. Gegeben $t \in [a, b]$ und $m \in \mathbb{N}$ sei

$$h := \frac{t - t_0}{m}$$

und

$$t_k := t_0 + kh \quad \text{für } k \in \{1, \dots, m\}.$$

Wir definieren Näherungswerte y_1, \dots, y_m für $\phi(t_1), \dots, \phi(t_m) = \phi(t)$ rekursiv wie folgt: Ist $k \in \{0, \dots, m-1\}$ und y_k schon berechnet, so definieren wir

$$\begin{aligned} w_{k1} &:= h f(t_k, y_k) \\ w_{k2} &:= h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{w_{k1}}{2}\right) \\ w_{k3} &:= h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{w_{k2}}{2}\right) \\ w_{k4} &= h f(t_k + h, y_k + w_{k3}) \end{aligned}$$

und damit

$$y_{k+1} := y_k + \frac{1}{6}(w_{k1} + 2w_{k2} + 2w_{k3} + w_{k4}).$$

Bemerkung 16.20 Das Runge-Kutta-Verfahren ist also ein Einschrittverfahren mit dem Einzelschritt

$$\sigma(t_0, y_0, h) := y_0 + \frac{1}{6}(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4)$$

wobei

$$\begin{aligned} w_1 &:= h f(t_0, y_0) \\ w_2 &:= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2}\right) \\ w_3 &:= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2}\right) \\ w_4 &= h f(t_0 + h, y_0 + w_3) \end{aligned}$$

Bemerkung 16.21 Man kann zeigen, dass das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ein Einschrittverfahren vierter Ordnung ist; gegeben f gibt eine Konstante $C \geq 0$ derart, dass

$$|\sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t)| \leq C |h|^5 \tag{81}$$

für alle $(t_0, y_0, h) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$. Nach 16.13 gibt es somit in der Situation von 16.18 und 16.19 ein $h_0 > 0$ und eine Konstante $K \geq 0$ derart, dass

$$|y_m - \phi(t)| \leq K |h|^4$$

falls $|h| \leq h_0$, unabhängig von t_0, y_0, t und m . Für feste t_0, y_0 und t ist hierbei $|h|^4$ proportional zu $(1/m)^4$.

Bemerkung 16.22 Um (81) zu erhalten, berechnet man für feste t_0 und y_0 die Ableitungen von

$$\psi_{t_0, y_0}(h) := \sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t_0 + h)$$

nach h bis zur vierten Ordnung und zeigt, dass diese für $h = 0$ verschwinden,²⁹ so dass die Taylorentwicklung vierter Ordnung um 0 also

$$\sigma(t_0, y_0, h) - \phi_{t_0, y_0}(t_0 + h) = h^5 \frac{\psi_{t_0, y_0}^{(5)}(\xi)}{5!}$$

lautet mit einem $\xi = \xi(t_0, y_0, h)$ zwischen 0 und h (wir benutzen dabei das Restglied von Lagrange wie in Teil (b) des Satzes von Taylor in §1.6 des Skripts zur Mathematik 2). Die fünfte Ableitung $\psi_{t_0, y_0}^{(5)}(h)$ kann man berechnen (oder auch nur gut genug ihre Gestalt beschreiben) und sieht, dass dies eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Die Rechnungen sind im Prinzip nicht schwierig, ergeben aber lange Formeln mit vielen Summanden und füllen einige Seiten. Details finden Sie bei Interesse in Anhang C.

Bemerkung 16.23 Das Runge-Kutta-Verfahren ist auch auf beliebige C^5 -Funktionen $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anwendbar (für $|h|$ genügend klein), so lange für gegebene t_0, y_0 eine Lösung $\phi_{t_0, y_0}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems auf ganz $[a, b]$ existiert (mit Argumenten wie in Bemerkung 16.16).

Beispiel 16.24 Wie in Beispiel 16.5 betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y(t), \quad y(0) = 1$$

auf $[0, 1]$ mit der exakten Lösung $\phi(t) = e^{2t}$. Wir wollen einen Schritt des Runge-Kutta-Verfahrens durchführen, um $\phi(1)$ näherungsweise zu berechnen. Die rechte Seite der DGL wird beschrieben durch

$$f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \mapsto 2y.$$

Es ist $t_0 = 0, y_0 = 1, t = 1, h = t - t_0 = 1,$

$$w_1 := hf(t_0, y_0) = 1 \cdot 2 \cdot y_0 = 2$$

$$w_2 := hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2}\right) = 1 \cdot 2 \cdot (y_0 + w_1/2) = 2 + w_1 = 4$$

$$w_3 := hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2}\right) = 1 \cdot 2 \cdot (y_0 + w_2/2) = 6$$

$$w_4 = hf(t_0 + h, y_0 + w_3) = 1 \cdot 2 \cdot (y_0 + w_3) = 14.$$

²⁹Das ist nicht schwierig, aber recht langwierig und mühevoll.

Als Näherungswert erhalten wir

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4) = 1 + \frac{1}{6}(2 + 8 + 12 + 14) = 1 + 6 = 7.$$

Der korrekte Wert ist $\phi(1) = e^2 = 7,389\dots$

Bei einem Eulerschritt mit $h = 1$ hätten wir den deutlich schlechteren Näherungswert $y_0 + h f(t_0, y_0) = 1 + 1 \cdot 2 \cdot y_0 = 3$ erhalten.

17 Beschreibende Statistik

Für die Allgemeinbildung werden noch einige Grundbegriffe der deskriptiven Statistik bereitgestellt.

Eindimensionale Messreihen

Daten liegen uns oft in einer endlichen Folge

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

ganzer oder reeller Zahlen vor, etwa die Ergebnisse einer n mal durchgeführten Messung. Wir wollen der Messreihe Informationen entnehmen, also daraus neue Zahlen berechnen, die wesentliche Aspekte der Messreihe erfassen. Es ist dafür hilfreich, die Zahlen der gegebenen Messreihe aufsteigend anzuordnen; wir erhalten die zugeordnete *geordnete* Messreihe

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Beispiel 17.1 Fünfmaliges Werfen eines Würfels liefert die Zahlen

$$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 6, x_5 = 1.$$

Die zugehörige geordnete Messreihe ist dann

$$x_{(1)} = 1, x_{(2)} = 1, x_{(3)} = 3, x_{(4)} = 4, x_{(5)} = 6.$$

Beispiel 17.2 Eine Klausur mit 50 Gesamtpunkten wird von 4 Studierenden geschrieben. Die erreichten Punktzahlen sind

$$x_1 = 11, x_2 = 26, x_3 = 30, x_4 = 33.$$

Diese sind bereits ansteigend angeordnet, die zugehörige Messreihe ist also wiederum

$$x_{(1)} = 11, x_{(2)} = 26, x_{(3)} = 30, x_{(4)} = 33.$$

Aus einer Messreihe lassen sich zwei Zahlen berechnen, die anschaulich gesprochen dieser eine “Mitte” zuordnen wollen. Dies sind das arithmetische Mittel und der Median.

17.3 Das *arithmetische Mittel* einer Messreihe x_1, \dots, x_n ist definiert als

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Es wird auch der *empirische Mittelwert* genannt. Der *Median* der Messreihe ist definiert als

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist;} \\ x_{(\frac{n}{2})} & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \end{cases}$$

unter Benutzung der zugehörigen geordneten Messreihe.

Beispiel 17.4 Im obigen Würfelbeispiel ist

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(4 + 3 + 1 + 6 + 1) = \frac{15}{5} = 3.$$

Da $n = 5$ ungerade ist, ist $(n + 1)/2 = 3$ der mittlere der Indizes 1, 2, 3, 4, 5 und der Median ebenfalls

$$\tilde{x} = x_{(3)} = 3.$$

Beispiel 17.5 Im obigen Klausurbeispiel ist

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(11 + 26 + 30 + 33) = \frac{100}{4} = 25.$$

Da $n = 4$ gerade ist, haben wir zur Berechnung des Medians den Index $n/2 = 4/2 = 2$ in der geordneten Messreihe zu benutzen, es ist

$$\tilde{x} = x_{(2)} = 26.$$

Bemerkung 17.6 Der Mittelwert reagiert empfindlich auf “Ausreißer”. Haben zum Beispiel 4 Schüler die Note 1 und einer die Note 6, ist der Notendurchschnitt $\frac{10}{5} = 2$. Der Median ist “robuster”. Im Klausurpunkte-Beispiel wäre er unverändert, wenn die schlechteste Punktzahl 3 statt 11 Punkte wäre. Die Durchschnitts-Punktzahl \bar{x} hingegen würde um 2 auf 23 Punkte absinken.

Der Mittelwert und Median sind *Lagemaßzahlen*, die uns Informationen darüber geben, wo die beobachteten Werte auf der Zahlengeraden liegen. Wir suchen auch Maßzahlen, die die Breite der vorhandenen Messdaten beschreiben bzw. das Maß ihrer Schwankung um die Mitte (sogenannte *Streuungsmaßzahlen*). Die einfachste ist die *Spannweite*:

17.7 Die *Spannweite* der Messreihe x_1, \dots, x_n ist definiert als

$$\max_{i=1, \dots, n} x_i - \min_{i=1, \dots, n} x_i = x_{(n)} - x_{(1)}.$$

Varianz, Standardabweichung und Quartilsabstand sind weitere Streuungsmaßzahlen.

17.8 Die empirische Varianz einer Messreihe x_1, \dots, x_n mit $n \geq 2$ ist definiert als

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Die *empirische Standardabweichung* oder *Streuung* s ist die Wurzel der empirischen Varianz,

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Warum der Nenner $n-1$ zweckmäßiger ist als n , wird im Buch von Lehn-Wegmann motiviert.

Beispiel 17.9 In unserem Würfel-Beispiel hat die Messreihe die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{4}(1 + 0 + 4 + 9 + 4) = \frac{18}{4} = 4,5.$$

Die Standardabweichung ist also

$$s = \sqrt{s^2} = 2,121 \dots$$

Beispiel 17.10 In unserem Klausurpunkte-Beispiel hat die Messreihe die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{3}(14^1 + 1^2 + 5^2 + 8^2) = \frac{1}{3}(196 + 1 + 25 + 64) = \frac{286}{3} = 95,333 \dots$$

und Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2} = 9,76 \dots$$

17.11 Wir erinnern an den Begriff der Gaußklammer

$$[t] := \max\{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq t\}$$

einer reellen Zahl $t \geq 0$. Dies ist der ganzzahlige Anteil von t , den man durch Wegstreichen der Nachkommastellen erhält. Es ist also zum Beispiel

$$[3, 1] = 3, \quad [5, 73] = 5 \quad \text{und} \quad [6] = 6.$$

17.12 Für eine reelle Zahl $0 < p < 1$ ist das p -Quantil x_p einer Messreihe x_1, \dots, x_n definiert als

$$x_p := \begin{cases} x_{(pn)} & \text{wenn } pn \in \mathbb{N}; \\ x_{([pn+1])} & \text{wenn } pn \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

unter Benutzung der zugehörigen geordneten Messreihe. Ist $np \notin \mathbb{N}$, so nehmen wir also die nächstgrößere ganze Zahl.

Insbesondere ist also $x_{\frac{1}{2}} = \tilde{x}$ der Median der Messreihe.

17.13 Das $\frac{1}{4}$ -Quantil $x_{\frac{1}{4}}$ wird auch das *erste Quartil* der Messreihe genannt. Das $\frac{3}{4}$ -Quantil $x_{\frac{3}{4}}$ wird auch das *dritte Quartil* der Messreihe genannt. Die Differenz

$$q := x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}$$

heißt *Quartilsabstand*.

Beispiel 17.14 Im Würfelbeispiel ist $\frac{1}{4} \cdot 5 = 1,25$ nicht ganzzahlig, zur Berechnung des ersten Quartils haben wir also den nächstgrößeren ganzzahligen Index 2 zu nehmen,

$$x_{\frac{1}{4}} = x_{(2)} = 1$$

Auch $\frac{3}{4} \cdot 5 = 3,75$ ist nicht ganzzahlig zur Berechnung des dritten Quartils haben wir den nächstgrößeren ganzzahligen Index 4 zu nehmen,

$$x_{\frac{3}{4}} = x_{(4)} = 4.$$

Der Quartilsabstand ist die Differenz, $q = 4 - 1 = 3$.

Beispiel 17.15 Im Klausurpunktebeispiel ist $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ und $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$, also

$$x_{\frac{1}{4}} = x_{(1)} = 11, \quad x_{\frac{3}{4}} = x_{(3)} = 30 \quad \text{und} \quad q = 30 - 11 = 19.$$

Wir halten noch eine nützliche Formel fest.

17.16 Für die Varianz einer Messreihe x_1, \dots, x_n mit $n \geq 2$ gilt

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - n(\bar{x})^2 \right).$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - \bar{x})^2}_{=x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2} \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}n \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{=\bar{x}} + n(\bar{x})^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2. \end{aligned}$$

Kennzahlen für zweidimensionale Messreihen

Wir betrachten nun Messreihen

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

in den jeweils zwei verschiedene reelle Größen gemessen wurden (zum Beispiel Länge und Durchmesser einer Schraube).

Bemerkung 17.17 Tragen wir alle erhaltenen Punkte in der Ebene auf, erhalten wir eine sogenannte Punktwolke. Anders als im eindimensionalen Fall kann man Punkte in der Ebene nicht vergleichen und der Größe nach ordnen.

17.18 In der vorigen Situation sind

$$x_1, \dots, x_n$$

und

$$y_1, \dots, y_n$$

Messreihen reeller Zahlen wie im vorigen Abschnitt; wir können daher ihre arithmetischen Mittel

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

berechnen sowie ihre empirischen Varianzen

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{und} \quad s_y^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

und die zugehörigen empirischen Standardabweichungen

$$s_x := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{und} \quad s_y := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Bisher wurden die Messreihen $(x_1, \dots, x_n$ und y_1, \dots, y_n getrennt betrachtet. In den folgenden Begriff gehen die vollen Daten ein.

17.19 Im Fall $n \geq 2$ ist die *empirische Kovarianz* der zweidimensionalen Messreihe $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ definiert als

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Die folgende Formel ist manchmal nützlich:

17.20 Für jede Messreihe $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $n \geq 2$ gilt

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (n-1) s_{xy} &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{=x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \underbrace{n \sum_{i=1}^n y_i}_{=n \bar{y}} - \bar{y} \underbrace{n \sum_{i=1}^n x_i}_{=n \bar{x}} + n \bar{x} \bar{y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

Regressionsgeraden

Wie schon erwähnt, kann man die Punkte

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

einer zweidimensionalen Messreihe als Punktwolke in der Ebene interpretieren. Oft liegen die Punkte nahezu auf einer Geraden und man möchte nun rechnerisch diejenige Gerade finden, welche die Punktwolke in geeignetem Sinne am besten approximiert.

Genauer wollen wir eine Gerade mit Gleichung

$$y = ax + b$$

durch die Punktwolke legen. Uns interessiert nicht der rechtwinklige Abstand des Punkts (x_i, y_i) von der Geraden, sondern die Differenz der y -Komponenten bzw. ihr Quadrat,

$$(ax_i + b - y_i)^2.$$

Diese Beiträge summieren wir über alle i und wollen die Summe

$$f(a, b) := \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

minimieren durch geeignete Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$. Hierbei nehmen wir an, dass $x_i \neq x_j$ für geeignete i und j , so dass also $s_x^2 > 0$ ist. Am Minimum muss (a, b) ein kritischer Punkt von f sein, also

$$(0, 0) = \nabla f(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i, \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \right)$$

gelten. Für die zweite Komponente ist (nach Teilen durch $2n$) also

$$0 = a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = a\bar{x} + b - \bar{y}$$

gefordert, also

$$\bar{y} = a\bar{x} + b;$$

der Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) muss also auf der Geraden $y = ax + b$ liegen. Die vorige Gleichung lässt sich noch auflösen zu

$$b = \bar{y} - a\bar{x}. \quad (82)$$

Betrachtung der ersten Komponente des obigen Gradienten führt (nach Teilen durch 2) auf die Bedingung

$$0 = a \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Einsetzen von (82) führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= a \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - a\bar{x} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{=n\bar{x}} - \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= a \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - n(\bar{x})^2 \right)}_{(n+1)s_x^2} + n\bar{x}\bar{y} - \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= (n+1)s_x^2 a - (n+1)s_{xy}. \end{aligned}$$

Auflösen liefert

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}. \quad (83)$$

17.21 An der Stelle (a, b) mit $a := \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ und $b := \bar{y} - a\bar{x}$ nimmt f ein globales Minimum an, und nur dort.

Da f ein Polynom zweiten Grades ist, stimmt f mit seiner Taylorentwicklung 2. Ordnung um (a, b) (mit a und b wie oben) überein, es ist also für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha, \beta) = f(a, b) + \frac{1}{2}(\alpha - a, \beta - b)H_f(a, b)(\alpha - a, \beta - b)^T$$

mit der Hessematrix $H_f(a, b)$, wobei $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ benutzt wurde. Wir zeigen nun, dass $H_f(a, b)$ positiv definit ist. Für alle $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ist dann

$$(\alpha - a, \beta - b)H_f(a, b)(\alpha - a, \beta - b)^T > 0$$

und somit $f(\alpha, \beta) > f(a, b)$. In der Tat ist

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 2x_i^2 & \sum_{i=1}^n 2x_i \\ \sum_{i=1}^n 2x_i & 2n \end{pmatrix};$$

diese symmetrische Matrix ist nach dem Hurwitz-Kriterium der Mathematik 2 positiv definit, denn die obere linke Ecke ist $2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 > 0$ und die Determinante der Matrix ist

$$\begin{aligned} 2n \sum_{i=1}^n 2x_i^2 - 4n^2 (\bar{x})^2 &= 4n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right)}_{=(n+1)s_x^2} \\ &= 4n(n+1)s_x^2 > 0. \end{aligned}$$

17.22 Da die Funktion $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ minimiert wurde, spricht man auch von der *Methode der kleinsten Quadrate*. Die optimale Gerade mit der Gleichung

$$y = ax + b,$$

wobei a und b durch (83) und (82) gegeben sind, wird auch die *Regressionsgerade* (für y als Funktion von x) zur gegebenen Messreihe genannt.

Bemerkung 17.23 Setzt man x als affin-lineare Funktion $x = \alpha y + \beta$ von y an und minimiert $\sum_{i=1}^n (\alpha y_i + \beta - x_i)^2$, so erhält man eine (Regressionsgerade für x als Funktion von y genannte) Gerade. Diese braucht mit der obigen der Form $y = ax + b$ nicht übereinzustimmen.

A Beweis des globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes

In diesem Anhang beweisen wir den globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Lösungen von Anfangswertproblemen (Satz 15.14). Der Beweis ist nicht prüfungsrelevant.

Im Kapitel 16 der Mathematik 2 haben wir bereits Iterationsverfahren kennen gelernt, die ermöglichen, im \mathbb{R}^n Fixpunkte von Funktionen näherungsweise zu berechnen. Wir erinnern kurz an die Situation und stellen dann Verallgemeinerungen vor, die uns schließlich den Beweis von Satz 15.14 ermöglichen.

A.1 Eine Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in A$

$$|f(y) - f(x)| \leq L |y - x|.$$

Man nennt L dann eine *Lipschitz-Konstante* für f .

A.2 Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ wird eine Abbildung $f: A \rightarrow A$ eine *Kontraktion* genannt, wenn f Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$. Man nennt L dann auch eine *Kontraktionskonstante*.

Bemerkung A.3 Man beachte, dass für eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die Lipschitzbedingung aus 15.3 nicht das gleiche wie Lipschitzstetigkeit in A.1 ist, denn die Lipschitzbedingung schätzt nur $|f(t, z) - f(t, y)|$ ab, wenn das erste Argument, t , in $f(t, z)$ und $f(t, y)$ gleich ist.

Analog zu 15.9 gilt:

A.4 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, so ist f Lipschitz-stetig.

A.5 Beweis von A.4. Aus 15.7 folgt

$$L := \sup_{x \in U} \|J_f(x)\|_{\text{op}} \leq \sum_{i,j=1}^n \|\partial f_i / \partial x_j\|_{\infty} < \infty.$$

Für alle $x, y \in U$ folgt mit dem Mittelwertsatz (siehe 13.9 im Skript zur Mathematik 2)

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \int_0^1 J_f(x + t(y-x))(y-x) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\|J_f(x + t(y-x))\|_{\text{op}}}_{\leq L} |y-x| dt \leq L |y-x|. \end{aligned}$$

Aus der Mathematik 2 kennen wir den Banachschen Fixpunktsatz (den dortigen Satz 16.2).

A.6 (Banachscher Fixpunktsatz für Teilmengen von \mathbb{R}^d). *Es sei $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^d und $f: A \rightarrow A$ eine Selbstabbildung von A , welche eine Kontraktion ist. Sei $L \in [0, 1[$ eine Kontraktionskonstante für f . Dann gilt:*

- (a) f hat genau einen Fixpunkt $p \in A$ (d.h. $f(p) = p$).
- (b) Für jedes $x_0 \in A$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = p$.
- (c) Es gilt folgende a priori-Abschätzung: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$|f^k(x_0) - p| \leq \frac{L^k}{1-L} |f(x_0) - x_0|.$$

Wir kopieren dies für Funktionen von $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ in sich selbst (wie den Integraloperator I_f aus 15.21).

A.7 Eine Abbildung $T: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ wird *Lipschitz-stetig* genannt, wenn es eine reelle Konstante $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$\|T(\psi) - T(\phi)\|_\infty \leq L \|\psi - \phi\|_\infty$$

für alle $\phi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Kann $L < 1$ gewählt werden, so nennt man T eine *Kontraktion* und L eine *Kontraktionskonstante*.

Analog zu A.6 kann man zeigen (mehr Details finden Interessierte in Bemerkung A.14):

A.8 (Banachscher Fixpunktsatz für Funktionenräume). *Es sei*

$$T: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$$

eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $L \in [0, 1[$. Dann gilt:

- (a) T hat genau einen Fixpunkt $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ (d.h. $T(\phi) = \phi$).
- (b) Für jedes $\phi_0 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ konvergiert die Folge der Funktionen $T^k(\phi_0)$ gleichmäßig gegen ϕ , es gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k(\phi_0) - \phi\|_\infty = 0.$$

- (c) Es gilt folgende a priori-Abschätzung: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\|T^k(\phi_0) - \phi\|_\infty \leq \frac{L^k}{1 - L} \|T(\phi_0) - \phi_0\|_\infty.$$

Wir beweisen nun den globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz, bzw. zunächst einen Spezialfall.

A.9 In 15.14 erfülle f eine globale Lipschitzbedingung mit Konstante $L \geq 0$. Dann ist der Integraloperator

$$I_f: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n), \quad \phi \mapsto I_f(\phi)$$

mit $I_f(\phi)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $(b - a)L$. Für alle $\phi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ gilt nämlich für alle $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |I_f(\psi)(t) - I_f(\phi)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) - f(s, \phi(s)) ds \right| \\ &\leq \underbrace{|t - t_0|}_{\leq b - a} \sup_{s \in [a, b]} \underbrace{|f(s, \psi(s)) - f(s, \phi(s))|}_{\leq L |\psi(s) - \phi(s)| \leq L \|\psi - \phi\|_\infty} \quad (84) \\ &\leq (b - a)L \|\psi - \phi\|_\infty. \end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle $t \in [a, b]$ führt auf $\|I_f(\psi) - I_f(\phi)\|_\infty \leq (b - a)L \|\psi - \phi\|_\infty$. Die gewünschte Lipschitz-Stetigkeit ist also erfüllt.

A.10 Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $(b - a)L < 1$. Nach dem Vorigen ist I_f dann also eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\theta := (b - a)L$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat I_f genau einen Fixpunkt ϕ und nach (15.21) somit das Anfangswertproblem aus 15.14 genau eine auf ganz $[a, b]$ definierte Lösung, nämlich dieses ϕ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gilt für $\phi_0(t) := y_0$ und die Iterierten $\phi_k := I_f(\phi_{k-1}) = (I_f)^k(\phi_0)$ weiter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi\|_\infty = 0, \quad (85)$$

also insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_k(t) - \phi(t)| = 0$ für jedes $t \in [a, b]$ und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t) = \phi(t)$.

Jenseits des Spezialfalls sind weitere Argumente nötig, die im folgenden Abschnitt erläutert werden. In der Vorlesung haben wir uns mit A.10 begnügt und die weitere Theorie (insb. A.17 und A.18) übersprungen.

Ergänzungen und weitere Details

Dieser Abschnitt wurde in der Vorlesung übersprungen; er ist nicht prüfungsrelevant.

Zunächst wollen wir erläutern, warum der in A.8 formulierte Banachsche Fixpunktsatz für Funktionenräume bewiesen werden kann wie der aus der Mathematik 2 bekannte Banachsche Fixpunktsatz in \mathbb{R}^d (an den wir in A.6 erinnert haben).

A.11 Eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen $\phi_k \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ wird *Cauchy-Folge* genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ existiert derart, dass für alle $k, \ell \geq N$

$$\|\phi_k - \phi_\ell\|_\infty \leq \varepsilon$$

gilt.

Bemerkung A.12 Ist $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $t \in [a, b]$, so wählen wir für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ wie in A.11. Für alle $k, \ell \geq N$ ist dann

$$|\phi_k(t) - \phi_\ell(t)| \leq \|\phi_k - \phi_\ell\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Also ist dann $(\phi_k(t))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n .

A.13 In $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Beweis. Wir betrachten eine Cauchy-Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen $\phi_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (wie in A.11). Für jedes $t \in [a, b]$ ist nach A.12 dann $(\phi_k(t))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n , also konvergiert gegen ein Element von \mathbb{R}^n , das wir $\phi(t)$ nennen. Dann ist

$$\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \phi(t)$$

stetig, denn wir zeigen Stetigkeit an einer Stelle $s \in [a, b]$: Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k, \ell \geq N$ und alle $t \in [a, b]$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$ derart, dass für alle $t \in [a, b]$

$$|\phi_k(t) - \phi_\ell(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit $\ell \rightarrow \infty$ folgt dann

$$|\phi_k(t) - \phi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{86}$$

für alle $k \geq N$ und alle $t \in [a, b]$. Wir wählen $k := N$ und sehen, dass für alle $t \in [a, b]$

$$|\phi_N(t) - \phi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{87}$$

Da ϕ_N an der Stelle s stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - s| \leq \delta$

$$|\phi_N(t) - \phi_N(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{88}$$

Mit (87) und (88) folgt für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - s| \leq \delta$

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |\phi(s) - \phi_N(s)| + |\phi_N(s) - \phi_N(t)| + |\phi_N(t) - \phi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist ϕ stetig an der Stelle s . Nach (86) gilt

$$\|\phi_k - \phi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Es gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - \phi\|_\infty = 0$$

und somit ist die Funktionenfolge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig konvergent gegen ϕ .

Bemerkung A.14 Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes für Kontraktionen von $A \subseteq \mathbb{R}^d$ in 16.4 des Skripts zur Mathematik 2 kann wörtlich auf den Fall einer Kontraktion T von $C([c, d], \mathbb{R}^n)$ mit $c < d$ übertragen werden, mit folgenden Ersetzungen: Man ersetze \mathbb{R}^d und A durch $C([c, d], \mathbb{R}^n)$ und f durch T ; man ersetze stets n durch ein anderes Symbol, etwa ℓ ; man ersetze die Betragsstriche $|\cdot|$ für die Länge eines Vektors in \mathbb{R}^d durch die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Wir können im Beweis benutzen, dass nach A.13 Cauchy-Folgen in $C([c, d], \mathbb{R}^n)$ stets konvergent sind. Das Argument dafür, dass Grenzwerte wieder in A liegen, kann weggelassen werden, da nun A der volle Vektorraum $C([c, d], \mathbb{R}^n)$ ist.

A.15 Ist $T: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Lipschitz-stetige Abbildung und $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ konvergiert, so konvergiert $T(\phi_k)$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $T(\phi)$.

Beweis: Ist L eine Lipschitz-Konstante für T , so gilt

$$\|T(\phi_k) - T(\phi)\|_\infty \leq L \|\phi_k - \phi\|_\infty \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$.

A.16 Sind $T: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $S: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig, so auch $T \circ S: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\phi \mapsto T(S(\phi))$.

Beweis. Ist L eine Lipschitz-Konstante für T und Λ eine Lipschitz-Konstante für S , so gilt für alle $\phi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|(T \circ S)(\phi) - (T \circ S)(\psi)\|_\infty &= \|T(S(\phi)) - T(S(\psi))\|_\infty \\ &\leq L \|S(\phi) - S(\psi)\|_\infty \leq L\Lambda \|\phi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Also ist $T \circ S$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L\Lambda$.

A.17 (Verallgemeinerter Fixpunktsatz). Es sei $T: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Lipschitz-stetige Abbildung derart, dass die ℓ te Potenz $T^\ell := T \circ \dots \circ T$ eine Kontraktion ist für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (a) T hat genau einen Fixpunkt ϕ .
- (b) Für jedes $\phi_0 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ konvergiert die Folge der Iterierten $T^k(\phi_0)$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen ϕ .

Beweis. (a) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat die Kontraktion T^ℓ genau einen Fixpunkt $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Wir behaupten, dass auch $T(\phi)$ ein Fixpunkt von T^ℓ ist; wegen der Eindeutigkeit des selbigen ist dann

$$\phi = T(\phi),$$

also ϕ auch ein Fixpunkt von T . Die Behauptung ist klar: Es ist

$$T^\ell(T(\phi)) = T^{\ell+1}(\phi) = T(T^\ell(\phi)) = T(\phi),$$

wobei $T^\ell(\phi) = \phi$ benutzt wurde. Ist ψ ein Fixpunkt von T , so auch von T^ℓ und somit $\psi = \phi$.

(b) Sei $\phi_0 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Für jedes $j \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ konvergieren nach dem Banachschen Fixpunktsatz die Iterierten

$$(T^\ell)^k((\phi_0)^j)$$

gegen ϕ , es gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{k\ell+j}(\phi_0) = \phi. \quad (89)$$

Da \mathbb{N}_0 die Vereinigung der Teilmengen $\ell\mathbb{N}_0, \ell\mathbb{N}_0 + 1, \dots, \ell\mathbb{N}_0 + (\ell - 1)$ ist und (89) gilt für jedes $j \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$, folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(\phi_0) = \phi$.

A.18 Beweis des globalen Existenzsatzes 15.14 (allgemeiner Fall). Wir wissen aus A.9, dass I_f Lipschitz-stetig ist. Wir zeigen per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, dass für alle $\phi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ und alle $t \in [a, b]$

$$|(I_f)^m(\psi)(t) - (I_f)^m(\phi)(t)| \leq \frac{L^m |t - t_0|^m}{m!} \|\psi - \phi\|_\infty. \quad (90)$$

Für $m = 1$ ist dies (84). Induktionsschritt: Gilt (90) für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |(I_f)^{m+1}(\psi)(t) - (I_f)^{m+1}(\phi)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, (I_f)^m(\psi)(s)) - f(s, (I_f)^m(\phi)(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(s, (I_f)^m(\psi)(s)) - f(s, (I_f)^m(\phi)(s))|}_{\leq L |(I_f)^m(\psi)(s) - (I_f)^m(\phi)(s)|} ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \frac{L^{m+1}}{m!} (t - t_0)^m \|\psi - \phi\|_\infty ds \\ &= \frac{L^{m+1}}{(m+1)!} (t - t_0)^{m+1} \|\psi - \phi\|_\infty, \end{aligned}$$

wie benötigt. Der Beweis für $t < t_0$ ist ähnlich.

Dann ist insbesondere für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\|(I_f)^m(\psi) - (I_f)^m(\phi)\|_\infty \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!}(b-a)^m$$

für alle $\phi, \psi \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$, also $\frac{L^m(b-a)^m}{m!}$ eine Lipschitzkonstante für $(I_f)^m$.

Da $e^{(b-a)L} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b-a)^m L^m}{m!} < \infty$, bilden die Summanden eine Nullfolge. Es gibt somit ein $\ell \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{(b-a)^\ell L^\ell}{\ell!} < 1$. Nach dem Vorigen ist dies eine Lipschitzkonstante für $(I_f)^\ell$, also $(I_f)^\ell$ eine Kontraktion. Nach dem verallgemeinerten Fixpunktsatz hat I_f somit genau einen Fixpunkt ϕ (was nach 15.21 dann die eindeutige Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ auf $[a, b]$ ist) und für $\phi_0 := y_0$ konvergiert $(I_f)^k(\phi_0)$ gleichmäßig gegen ϕ .

B Mehr über Einschrittverfahren

Dieser Abschnitt ist nicht prüfungsrelevant und wurde in der Vorlesung übersprungen. Er beinhaltet Beweise für 16.13 und 16.15.

B.1 Wir geben hier einen Beweis für 16.13.

Per Voraussetzung erfüllt $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine globale Lipschitzbedingung mit einer Konstanten $L > 0$. Es gilt also

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z| \quad \text{für alle } t \in [a, b] \text{ und } y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wählen $h_0 > 0$ so klein, dass

$$h_0 L < 1.$$

Per Voraussetzung gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C \geq 0$ derart, dass

$$\delta(t_0, y_0, h) := |\phi_{t_0, y_0}(t_0 + h) - \sigma(t_0, y_0, h)| \leq C |h|^{p+1}$$

für alle $t_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$. Wir nennen $\delta(t_0, y_0, h)$ den *lokalen Fehler*; dies ist die Größe der Differenz von y_{k+1} und der zur Zeit t_k mit dem Wert y_k startenden Lösung der Differentialgleichung. Es seien nun $t_0 \in [a, b]$, $h \in \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ und es seien $t_k := t_0 + kh$ für $k \in \{1, \dots, m\}$ und

$$y_k := \sigma(t_{k-1}, y_{k-1}, h).$$

Für $k \in \{0, \dots, m\}$ nennen wir

$$\Delta_k := |\phi_{t_0, y_0}(t_k) - y_k|$$

den *globalen Fehler* im k ten Schritt. Da $\phi_{t_0, y_0}(t_0) = y_0$, ist $\Delta_0 = 0$. Wir nehmen nun an, dass $|h| < h_0$. Für feste t_0, y_0 und m wie zuvor ist $|h| < h_0$ und somit $1 - |h|L \geq 1 - h_0 L > 0$, folglich

$$\theta := \frac{1}{1 - |h|L} > 0.$$

Wir zeigen, dass für alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\Delta_k \leq (1 + \theta + \dots + \theta^{k-1}) C |h|^{p-1}. \quad (91)$$

Für $k = 1$ ist $\Delta_1 = |\phi_{t_0, y_0}(t_1) - y_1| = |\phi_{t_0, y_0}(t_0 + h) - \sigma(t_0, y_0, h)| = \delta(t_0, y_0, h) \leq C|h|^{p+1}$, die Aussage also wahr. Ist $k \in \{1, \dots, m-1\}$ und gilt die Aussage für k , so ist

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= |\phi_{t_0, y_0}(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq |\phi_{t_0, y_0}(t_{k+1}) - \phi_{t_k, y_k}(t_{k+1})| + \underbrace{|\phi_{t_k, y_k}(t_{k+1}) - y_{k+1}|}_{=\sigma(t_k, y_k, h) \leq C|h|^{p+1}} \\ &\leq |\phi_{t_0, y_0}(t_{k+1}) - \phi_{t_k, y_k}(t_{k+1})| + C|h|^{p+1}. \end{aligned} \quad (92)$$

Setzen wir $\psi(t) := \phi_{t_0, y_0}(t) - \phi_{t_k, y_k}(t)$ für t zwischen t_k und t_{k+1} , so haben wir für jedes t wie zuvor

$$\phi_{t_0, y_0}(t) = \phi_{t_0, y_0}(t_k) + \int_{t_k}^t \underbrace{\phi'(s)}_{=f(s, \phi_{t_0, y_0}(s))} ds$$

und

$$\phi_{t_k, y_k}(t) = \underbrace{\phi_{t_k, y_k}(t_k)}_{=y_k} + \int_{t_k}^t \underbrace{\phi'_{t_k, y_k}(s)}_{=d(s, \phi_{t_k, y_k}(s))} ds,$$

so dass also

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &= |\phi_{t_0, y_0}(t) - \phi_{t_k, y_k}(t)| \\ &\leq \underbrace{|\phi_{t_0, y_0}(t_k) - y_k|}_{=\Delta_k} + \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi_{t_0, y_0}(s)) - f(s, \phi_{t_k, y_k}(s)) ds \right| \\ &\leq \Delta_k + \leq |t - t_0|_{\leq |h|} \sup_s \underbrace{|f(s, \phi_{t_0, y_0}(s)) - f(s, \phi_{t_k, y_k}(s))|}_{\leq L|\phi_{t_0, y_0}(s) - \phi_{t_k, y_k}(s)| \leq L\|\psi\|_\infty} \\ &\leq \Delta_k + |h|L\|\psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Übergang zum Supremum in t liefert

$$\|\psi\|_\infty \leq \Delta_k + |h|L\|\psi\|_\infty,$$

so dass also $(1 - |h|L)\|\psi\|_\infty \leq \Delta_k$ und somit

$$|\phi_{t_0, y_0}(t_{k+1}) - \phi_{t_k, y_k}(t_{k+1})| \leq \|\psi\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |h|L} \Delta_k = \theta \Delta_k.$$

Nach (92) und Induktionsvoraussetzung ist also

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &\leq \theta \Delta_k + C|h|^{p+1} = \theta(1 + \theta + \dots + \theta^{k-1})C|h|^{p+1} + C|h|^{p+1} \\ &= (1 + \theta + \dots + \theta^k)C|h|^{p+1}, \end{aligned}$$

was den Induktionsbeweis beendet.

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{(b-a)L}{\ell} \leq \frac{1}{2}.$$

Wir werden später nachrechnen, dass das Supremum

$$R := \sup \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x} : x \in [1, \infty[\right\}$$

endlich ist. Da wir $x = 1$ nehmen können, ist

$$R \geq 2.$$

Wir werden zudem sehen, dass immer

$$\frac{1}{(1 - |h|L)^m} \leq R^\ell. \quad (93)$$

Folglich ist

$$\Delta_m \leq K |h|^p \quad \text{mit} \quad K := \frac{R^\ell C}{L},$$

was den Beweis beendet. In der Tat ist wegen

$$\frac{1}{\theta - 1} = \frac{1}{\frac{1}{1-|h|L} - 1} = \frac{1}{\frac{1-1+|h|L}{1-|h|L}} = \frac{1 - |h|L}{|h|L} \leq \frac{1}{|h|L}$$

(im Falle $h \neq 0$) und (91)

$$\begin{aligned} \Delta_m &\leq (1 + \theta + \dots + \theta^{m-1})C |h|^{p-1} \\ &= \frac{\theta^m - 1}{\theta - 1} C |h|^{p-1} \leq \frac{\theta^m}{\theta - 1} C |h|^{p+1} \\ &\leq \theta^m \frac{C}{L} |h|^p = \frac{1}{(1 - |h|L)^m} \frac{C}{L} |h|^p \\ &\leq R^\ell \frac{C}{L} |h|^p. \end{aligned}$$

Das Supremum R der Funktion

$$[1, \infty[\rightarrow]0, \infty[, \quad x \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x} = e^{-x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)}$$

stimmt überein mit dem Supremum der Funktion

$$g:]0, 1[\rightarrow]0, \infty[, \quad y \mapsto e^{-\frac{\ln(1-y/2)}{y}}.$$

Da nach der Regel von de l'Hospital der Limes

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{\ln(1-y/2)}{y} = \frac{(-1/2)/(1-y/2)}{1} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2}$$

existiert, lässt sich g durch $g(0) := e^{1/2}$ zu einer stetigen Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ fortsetzen; diese nimmt nach dem Satz vom Maximum ein Maximum an, ist also nach oben beschränkt, so dass $R < \infty$.

Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \ell$, so ist

$$\frac{1}{(1-|h|L)^m} \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^m} \leq 2^m \leq 2^\ell \leq R^\ell$$

unter Benutzung von $R \geq 2$; also gilt (93). Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \ell$, so ist $m/\ell \geq 1$ und

$$|h|L = \frac{|t-t_0|}{m} = \frac{1}{m/\ell} \frac{|t-t_0|}{\ell} \leq \frac{1}{m/\ell} \frac{b-a}{\ell} \leq \frac{1}{2(m/\ell)},$$

also

$$\frac{1}{(1-|h|L)^m} \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{2(m/\ell)})^m} = \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2(m/\ell)})^{m/\ell}} \right)^\ell \leq R^\ell;$$

wiederum gilt (93).

B.2 Beweis zu Bemerkung 16.15. Wir setzen $M := \|f\|_\infty$ und zeigen, dass die Behauptung mit

$$K' := 2M + Kh_0$$

gilt. Jedes $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ ist in $[t_{j-1}, t_j]$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist $|\tau - t_{j-1}| \leq |t_j - t_{j-1}| = h$ und somit

$$|\phi(\tau) - \phi(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{\tau} f(s, \phi(s)) ds \right| \leq |\tau - t_{j-1}| \|f\|_\infty \leq hM.$$

Weiter ist $\eta_m(\tau) - y_{j-1} = \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(y_j - y_{j-1}) = \frac{\tau - t_{j-1}}{h} hf(t_{j-1}, y_{j-1})$ und somit

$$|\eta_m(\tau) - y_{j-1}| \leq |\tau - t_{j-1}| |f(t_{j-1}, y_{j-1})| \leq hM.$$

Schließlich ist $|\phi(t_{j-1}) - y_{j-1}| = \Delta_{j-1} \leq C h^2 \leq C h_0 h$. Folglich ist

$$\begin{aligned} |\phi(\tau) - \eta_m(\tau)| &\leq |\phi(\tau) - \phi(t_{j-1})| + |\phi(t_{j-1}) - y_{j-1}| + |y_{j-1} - \eta_m(\tau)| \\ &\leq h M + C h_0 h + h M = K' h. \end{aligned}$$

C Details zum Runge-Kutta-Verfahren

In diesem Anhang werden Details zu Bemerkung 16.22 gegeben; er ist nicht prüfungsrelevant. Wir betrachten wie dort eine beschränkte C^5 -Funktion

$$f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

deren partielle Ableitungen bis zur 5. Ordnung beschränkte Funktionen sind. Gegeben $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, so dass also

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b] \quad (94)$$

und

$$\phi(t_0) = y_0. \quad (95)$$

Wir zeigen nun:

C.1 ϕ ist eine C^6 -Funktion. Es gilt

$$\phi'(t_0) = f(t_0, y_0), \quad (96)$$

$$\phi''(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0), \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(t_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 f(t_0, y_0) \end{aligned} \quad (98)$$

und die vierte Ableitung ist

$$\begin{aligned}
\phi^{(4)}(t_0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&+ 5 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^3 \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^3 f(t_0, y_0). \tag{99}
\end{aligned}$$

Weiter gibt es (unabhängig von a, b, f, t_0 und y_0) ein Polynom p in reellen Variablen $s_{k,\ell}$ für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k + \ell \leq 4$, so dass für alle $t \in [a, b]$

$$\phi^{(5)}(t) = p \left(\left(\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell}(t, \phi(t)) \right)_{k+\ell \leq 4} \right).$$

Die Funktion

$$g := p \circ \left(\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \right)_{k+\ell \leq 4} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist beschränkt und auch $\phi^{(5)}$ ist beschränkt mit $\|\phi^{(5)}\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Nachweis. Haben wir die Formel für $\phi^{(5)}(t)$, so ist die letzte Aussage klar: Da Summen und Produkte beschränkter Funktionen beschränkt sind, ist auch ein Polynom in beschränkten Funktionen beschränkt. Also ist g beschränkt. Für jedes $t \in [a, b]$ ist

$$\phi^{(5)}(t) = g(t, \phi(t)),$$

also

$$|\phi^{(5)}(t)| = |g(t, \phi(t))| \leq \|g\|_\infty$$

und folglich $\|\phi^{(5)}\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Die erste Ableitung von ϕ ist durch (94) gegeben; insbesondere gilt also

$$\phi'(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

und somit (96), unter Benutzung der Anfangsbedingung (95). Da ϕ' durch (94) gegeben ist und ϕ eine C^1 -Funktion, ist ϕ' nach der Kettenregel C^1 (und folglich ϕ eine C^2 -Funktion), mit

$$\phi''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t))\phi'(t).$$

Wegen (94) ist also

$$\phi''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)). \quad (100)$$

Im Spezialfall $t = t_0$ ergibt sich mit $\phi(t_0) = y_0$ die Formel (97). Da die rechte Seite von (100) eine C^1 -Funktion von t ist, ist ϕ eine C^3 -Funktion und

$$\begin{aligned} \phi'''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, \phi(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t, \phi(t)) \phi'(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) \phi'(t) f(t, \phi(t)) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \phi'(t). \end{aligned}$$

Wegen (94) ist also

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, \phi(t)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \right)^2 f(t, \phi(t)). \end{aligned} \quad (101)$$

Im Spezialfall $t = t_0$ ergibt sich mit $\phi(t_0) = y_0$ die Formel (98). Nun ist die rechte Seite von (101) eine C^1 -Funktion, also ϕ eine C^4 -Funktion und mit

Ketten- und Produktregel ist $\phi^{(4)}(t)$ gleich

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, \phi(t)) + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial t^2}(t, \phi(t)) \phi'(t) \\
& + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) + 2 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial t \partial y}(t, \phi(t)) \phi'(t) f(t, \phi(t)) \\
& + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \phi'(t) \\
& + \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t))^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t, \phi(t)) \phi'(t) f(t, \phi(t))^2 \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) 2 f(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) 2 f(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \phi'(t) \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) \phi'(t) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) \\
& + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t, \phi(t)) \phi'(t) \\
& + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) \phi'(t) f(t, \phi(t)) \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \phi'(t) \tag{102}
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\phi^{(4)}(t) &= \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, \phi(t)) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) \\
& + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t))^2 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) \\
& + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t))^3 \\
& + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \phi(t)) f(t, \phi(t))^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \\
& + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, \phi(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) \\
& + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t)) \right)^3 f(t, \phi(t)). \tag{103}
\end{aligned}$$

Für $t = t_0$ ist $\phi(t_0) = y_0$ und es folgt (99).

Wir schreiben vorübergehend $(x_1, x_2) = (t, y)$, da dies uns Multiindex-Schreibweise für partielle Ableitungen ermöglicht. Nach (103) ist $\phi^{(4)}(t)$ eine Summe von Produkten, die jeweils von der Form

$$\frac{\partial^{|\alpha_1|} f}{\partial x^{\alpha_1}}(t, \phi(t)) \cdots \frac{\partial^{|\alpha_m|} f}{\partial x^{\alpha_m}}(t, \phi(t))$$

sind für ein $m \in \mathbb{N}$ und Multiindizes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha_j| \leq 3$. Mit $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ ist die Ableitung des Produkts nach t gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \frac{\partial^{|\alpha_1|} f}{\partial x^{\alpha_1}}(t, \phi(t)) \cdots \frac{\partial^{|\alpha_{j-1}|} f}{\partial x^{\alpha_{j-1}}}(t, \phi(t)) \frac{\partial^{|\alpha_j|+1} f}{\partial x^{\alpha_j+e_1}}(t, \phi(t)) \frac{\partial^{|\alpha_{j+1}|} f}{\partial x^{\alpha_{j+1}}}(t, \phi(t)) \cdots \frac{\partial^{|\alpha_m|} f}{\partial x^{\alpha_m}}(t, \phi(t)) \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^{|\alpha_1|} f}{\partial x^{\alpha_1}}(t, \phi(t)) \cdots \frac{\partial^{|\alpha_{j-1}|} f}{\partial x^{\alpha_{j-1}}}(t, \phi(t)) \frac{\partial^{|\alpha_j|+1} f}{\partial x^{\alpha_j+e_2}}(t, \phi(t)) \frac{\partial^{|\alpha_{j+1}|} f}{\partial x^{\alpha_{j+1}}}(t, \phi(t)) \cdots \frac{\partial^{|\alpha_m|} f}{\partial x^{\alpha_m}}(t, \phi(t)) \underbrace{\phi'(t)}_{=f(t, \phi(t))}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom in den Funktionen $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| \leq 4$, ausgewertet an der Stelle $(t, \phi(t))$. Die Summe $\phi^{(5)}(t)$ der Beiträge ist wieder von dieser Form. Insbesondere ist $\phi^{(5)}$ eine C^1 -Funktion, also ϕ eine C^6 -Funktion.

Wie in Bemerkung 16.20 definieren wir für f wie zuvor

$$\sigma(t_0, y_0, h) := y_0 + \frac{1}{6}(w_1(t_0, y_0, h) + 2w_2(t_0, y_0, h) + 2w_3(t_0, y_0, h) + w_4(t_0, y_0, h))$$

für alle $(t_0, y_0, h) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $t_0 + h \in [a, b]$, wobei

$$w_1(t_0, y_0, h) := h f(t_0, y_0), \quad (104)$$

$$w_2(t_0, y_0, h) := h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2}\right), \quad (105)$$

$$w_3(t_0, y_0, h) := h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2(t_0, y_0, h)}{2}\right), \quad (106)$$

$$w_4(t_0, y_0, h) := h f(t_0 + h, y_0 + w_3(t_0, y_0, h)). \quad (107)$$

Kürzer schreiben wir auch w_j statt $w_j(t_0, y_0, h)$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Da alle $w_j(t_0, y_0, h) = 0$ für $h = 0$, ist

$$\sigma(t_0, y_0, 0) = y_0. \quad (108)$$

Wir zeigen nun

C.2 Es ist σ eine C^5 -Funktion. Für alle $k \in \{1, \dots, 4\}$ ist

$$\frac{\partial^k \sigma}{\partial h^k}(t_0, y_0, 0)$$

gleich der rechten Seite von (96), (97), (98) bzw. (99).

Zudem zeigen wir:

C.3 Es ist $\frac{\partial^5 \sigma}{\partial h^5}$ eine beschränkte Funktion.

Wenn C.2 und C.3 richtig sind, können wir wie folgt die Details von Bemerkung 16.22 erklären: Mit g wie in C.1 ist

$$\|\phi^{(5)}\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

Für feste $t_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\psi: [a - t_0, b - t_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto \sigma(t_0, y_0, h) - \phi(t_0 + h)$$

eine C^5 -Funktion mit

$$\psi(0) = \sigma(t_0, y_0, 0) - \phi(t_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Man beachte, dass

$$\left. \frac{d^k}{dh^k} \right|_{h=0} (\phi(t_0 + h)) = \phi^{(k)}(t_0)$$

für alle $k \in \{1, \dots, 5\}$. Nach C.2 ist also

$$\psi^{(k)}(0) = 0$$

für alle $k \in \{1, \dots, 4\}$. Die Taylorformel mit Entwicklungspunkt $h_0 = 0$ und Lagrange-Restglied zeigt nun, dass

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \sum_{k=0}^4 \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{\psi^{(5)}(\xi)}{5!} h^5 \\ &= \frac{\psi^{(5)}(\xi)}{5!} h^5 \end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen 0 und h . Da

$$\begin{aligned} |\psi^{(5)}(\xi)| &= \left| \frac{\partial^5 \sigma}{\partial h^5}(t_0, y_0, \xi) - \phi^{(5)}(t_0 + \xi) \right| \leq \left| \frac{\partial^5 \sigma}{\partial h^5}(t_0, y_0, \xi) \right| + |\phi^{(5)}(t_0 + \xi)| \\ &\leq \left\| \frac{\partial^5 \sigma}{\partial h^5} \right\|_\infty + \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

folgt

$$|\sigma(t_0, y_0, h) - \phi(t_0 + h)| = |\psi(h)| \leq C |h|^5$$

mit

$$C := \frac{\|\frac{\partial^5 \sigma}{\partial h^5}\|_\infty + \|g\|_\infty}{5!}.$$

C.4 Beweis von C.2. Da w_1 aus C^5 -Funktionen zusammengesetzt ist, ist auch w_1 eine C^5 -Funktion. Somit ist auch w_2 eine C^5 -Funktion, folglich auch w_3 und somit auch w_4 . Somit ist auch σ eine C^5 -Funktion. Wir diskutieren nun nacheinander die Funktionen w_1, w_2, w_3 und w_4 , insbesondere ihre partiellen Ableitungen nach h bis zur fünften Ordnung. In C.9 können wir den Beweis dann beenden.

C.5 Diskussion von w_1 . Da

$$\frac{\partial w_1}{\partial h}(t_0, y_0, h) = f(t_0, y_0) \quad (109)$$

unabhängig von h ist, ist

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial h^2} = 0 \quad (110)$$

die Nullfunktion. Folglich ist auch

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial h^3} = \frac{\partial^4 w_1}{\partial h^4} = \frac{\partial^5 w_1}{\partial h^5} = 0. \quad (111)$$

Insbesondere ist $\frac{\partial w_1}{\partial h}$ eine beschränkte Funktion und ebenso $\frac{\partial^k w_1}{\partial h^k}$ für $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

C.6 Diskussion von w_2 . Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, h) &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2}\right) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2}\right) \\ &\quad + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2}\right) \underbrace{\frac{\partial w_1}{\partial h}(t_0, y_0, h)}_{=f(t_0, y_0)}. \end{aligned} \quad (112)$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) = f(t_0, y_0). \quad (113)$$

Mit Ketten- und Produktregel folgt aus (112), dass $\frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, h)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) f(t_0, y_0) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) \\ & + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) f(t_0, y_0) \\ & + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1(t_0, y_0, h)}{2} \right) f(t_0, y_0)^2, \end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial w_1}{\partial h}(t_0, y_0, h)$ überall gleich durch $f(t_0, y_0)$ ersetzt wurde. Wir können noch zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} &= \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\ &+ \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\ &+ \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2, \end{aligned} \quad (114)$$

wobei die Argumente von w_1 und w_2 der Lesbarkeit halber nicht hingeschrieben wurden. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0). \quad (115)$$

Es sind f und seine in (114) vorkommenden partiellen Ableitungen beschränkte Funktionen. Weiter gilt

$$h \in [a - t_0, b - t_0] \subseteq [a - b, b - a],$$

so dass auch h beschränkt ist. Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist auch die Funktion $\frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}$ beschränkt.

Ableiten von (114) nach h zeigt, dass $\frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 \\
& + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 \\
& + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3,
\end{aligned}$$

was sich noch zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} &= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
&+ \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) \\
&+ \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 \\
&+ \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3. \tag{116}
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}$ eine beschränkte Funktion. Auswerten von (116) an der Stelle $h = 0$ liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) &= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&+ \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2. \tag{117}
\end{aligned}$$

Ableiten von (116) zeigt, dass $\frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 \\
& \quad + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) \\
& + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 \\
& + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 \\
& + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 \\
& + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^4,
\end{aligned}$$

was sich noch zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 \\
& + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) + \frac{h}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{3h}{8} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^2 + \frac{h}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 \\
& + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^3 + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^4 \quad (118)
\end{aligned}$$

Für $h = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
& + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^3 \quad (119)
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4}$ nach (118) eine beschränkte Funktion.

Nach (118) ist $\frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4}$ eine Summe von skalaren Vielfachen von Termen der Form

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^\ell$$

(wobei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $k + \ell = 3$) mit Ableitung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^4 f}{\partial t^{k+1} \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^\ell + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 f}{\partial t^k \partial y^{\ell+1}} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^{\ell+1}, \quad (120)$$

und Termen der Form

$$h \frac{\partial^4 f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^\ell$$

(wobei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $k + \ell = 4$) mit Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^\ell + \frac{h}{2} \frac{\partial^5 f}{\partial t^{k+1} \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^\ell \\ + \frac{h}{2} \frac{\partial^5 f}{\partial t^k \partial y^{\ell+1}} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_1}{2} \right) f(t_0, y_0)^{\ell+1}. \end{aligned} \quad (121)$$

Da (120) und (121) beschränkte Funktionen sind, ist auch $\frac{\partial^5 w_2}{\partial h^5}$ eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) .

C.7 Diskussion von w_3 . Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3}{\partial h} &= f \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h}. \end{aligned} \quad (122)$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) = f(t_0, y_0). \quad (123)$$

Mit Ketten- und Produktregel folgt aus (122), dass $\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, h)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
& + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
& \quad + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}.
\end{aligned}$$

Wir können noch zusammenfassen zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} &= \frac{\partial f}{\partial t} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
&+ \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}. \tag{124}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0), \tag{125}$$

wobei (113) benutzt wurde. Es sind f und seine in (124) vorkommenden partiellen Ableitungen beschränkte Funktionen; ebenso sind $(t_0, y_0, h) \mapsto h$ beschränkt und die partiellen Ableitungen von w_2 , wie in C.6 gezeigt. Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist auch die Funktion $\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}$ beschränkt.

Ableiten von (124) nach h liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
& + \frac{h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
& + \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3},
\end{aligned}$$

was sich zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} &= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ \frac{h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}. \tag{126}
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial w_3}{\partial h^3}$ eine beschränkte

Funktion. Mit $h = 0$ liefern (126), (113) und (115)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) &= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \\
&\quad + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \\
&= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 f(t_0, y_0). \quad (127)
\end{aligned}$$

Ableiten von (126) nach h liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4} &= \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&\quad + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&\quad + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&\quad + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&\quad + \frac{3}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + \frac{3h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& \quad + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} \\
& \quad + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 \\
& + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^4 + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
& + \frac{3h}{8} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \right)^2 \\
& \quad + \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}, \\
& \quad + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} \\
& \quad \quad + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4},
\end{aligned}$$

was sich noch zusammenfassen lässt in der Form

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \\
&+ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} + \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \\
&+ \frac{h}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} + \frac{3h}{8} \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \\
&+ \frac{3h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + \frac{h}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^3 \\
&+ \frac{3h}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} + h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} \\
&+ \frac{h}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^4 + \frac{3h}{4} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \\
&+ \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2} \right)^2 + h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3} \\
&+ \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4}. \tag{128}
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial^4}{\partial h^4}$ eine beschränkte Funktion. Setzen wir $h = 0$ in (128), so erhalten wir mit (113), (115) und

(117)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^2 \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^3 \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}(t_0, y_0) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&+ \frac{9}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0). \tag{129}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $\frac{\partial^5 w_3}{\partial h^5}$ eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Ableiten des ersten Summanden in (128) nach h liefert

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h},$$

was eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Ableiten des achten Summanden in (128) nach h liefert

$$\frac{1}{16} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{32} \frac{\partial^5 f}{\partial t^5} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) + \frac{h}{32} \frac{\partial^5 f}{\partial t^4 \partial y} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h},$$

was eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Die übrigen Summanden in (128) sind skalare Vielfache von Termen der Form

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}},$$

wobei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k + \ell \leq 3$ sind, $m \in \{1, 2, 3\}$ und $n_j \in \{1, 2, 3\}$, mit Ableitung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial t^{k+1} \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial t^k \partial y^{\ell+1}} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}} \\
& + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^{n_i+1} w_2}{\partial h^{n_i+1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}}, \quad (130)
\end{aligned}$$

was eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Oder sie sind skalare Vielfache von Termen der Form

$$h \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}},$$

wobei $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k + \ell \leq 4$ sind, $m \in \{1, 2, 3\}$ und $n_j \in \{1, 2, 3, 4\}$, mit Ableitung

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}} \\
& + \frac{h}{2} \frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial t^{k+1} \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}} \\
& + \frac{h}{2} \frac{\partial^{k+\ell+1} f}{\partial t^k \partial y^{\ell+1}} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial h} \prod_{j=1}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}} \\
& + h \sum_{i=1}^m \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial t^k \partial y^\ell} \left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{w_2}{2} \right) \frac{\partial^{n_i+1} w_2}{\partial h^{n_i+1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\partial^{n_j} w_2}{\partial h^{n_j}}, \quad (131)
\end{aligned}$$

die ebenfalls eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist. Da (130) und (131) beschränkte Funktionen sind, ist auch $\frac{\partial^5 w_3}{\partial h^5}$ eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) .

C.8 *Diskussion von w_4 .* Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_4}{\partial h} &= f(t_0 + h, y_0 + w_3) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + h, y_0 + w_3) \\ &\quad + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h}. \end{aligned} \quad (132)$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial w_4}{\partial h}(t_0, y_0, 0) = f(t_0, y_0). \quad (133)$$

Mit Ketten- und Produktregel folgt aus (132), dass $\frac{\partial^2 w_4}{\partial h^2}(t_0, y_0, h)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + h, y_0 + w_3) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + h, y_0 + w_3) + h \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) + h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\ &\quad + h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}. \end{aligned}$$

Wir können noch zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_4}{\partial h^2}(t_0, y_0, h) &= 2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\ &\quad + h \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 2 h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\ &\quad + h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\ &\quad + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}. \end{aligned} \quad (134)$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) = 2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0), \quad (135)$$

wobei (123) benutzt wurde.

Es sind f und seine in (134) vorkommenden partiellen Ableitungen beschränkte

Funktionen; ebenso sind die Funktion $(t_0, y_0, h) \mapsto h$ beschränkt und die partiellen Ableitungen von w_3 . Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist auch die Funktion $\frac{\partial^2 w_4}{\partial h^2}$ beschränkt.

Ableiten von (134) nach h liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_4}{\partial h^3} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\
&\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \\
&\quad + h \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) + h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + 2 h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&+ 2 h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 2 h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\
&+ h \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + 2 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&\quad + h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3},
\end{aligned}$$

was sich zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 w_4}{\partial h^3} \\
&= 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&+ h \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 3 h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&+ 3 h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 3 h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&+ h \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + 3 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
&+ h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3}. \tag{136}
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial w_4}{\partial h^3}$ eine beschränkte Funktion. Mit $h = 0$ liefern (136), (123) und (125)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w_4}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) &= 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^2 + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \\
&= 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&+ 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 f(t_0, y_0). \tag{137}
\end{aligned}$$

Ableiten von (136) nach h liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w_4}{\partial h^4} &= 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
&+ 6 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + 6 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\
& +3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& +3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& \quad +3 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \\
& \quad +h \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(t_0 + h, y_0 + w_3) + h \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
& \quad +3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + 3h \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
& +3h \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 3h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& +3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 3h \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\
& +3h \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + 6h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& \quad +3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& +3h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} \\
& \quad + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + h \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 \\
& +h \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^4 + 3h \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& +3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& +3h \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 3h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \right)^2 \\
& \quad +3h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} + h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} \\
& + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4},
\end{aligned}$$

was sich noch zusammenfassen lässt in der Form

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 w_4}{\partial h^4} \\
& = 4 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \\
& + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} + h \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(t_0 + h, y_0 + w_3) \\
& + 4 h \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} + 6 h \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \\
& + 6 h \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 4 h \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^3 \\
& + 12 h \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} + 4 h \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} \\
& + h \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^4 + 6 h \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \\
& + 3 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2} \right)^2 + 4 h \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial w_3}{\partial h} \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3} \\
& + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_0 + h, y_0 + w_3) \frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4}. \tag{138}
\end{aligned}$$

Als Summe von Produkten beschränkter Funktionen ist $\frac{\partial^4 w_4}{\partial h^4}$ eine beschränkte Funktion. Setzen wir $h = 0$ in (138), so erhalten wir mit (123), (125) und

(127)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 w_4}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) \\
&= 4 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \\
&\quad + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^2 + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \\
&\quad + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) \left(\frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right)^3 + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \\
&\quad + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) \\
&= 4 \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&\quad + 12 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&\quad + 18 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^3 \\
&\quad + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 15 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \\
&\quad + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&\quad + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^3 f(t_0, y_0). \tag{139}
\end{aligned}$$

Wie im Falle von $\frac{\partial^5 w_3}{\partial h^5}$ sehen wir, dass $\frac{\partial^5 w_4}{\partial h^5}$ eine beschränkte Funktion von (t_0, y_0, h) ist.

C.9 Beweis von C.2 beenden. Per Definition ist w_1 eine C^5 -Funktion, somit w_2 , also w_3 und folglich w_4 . Per Definition ist σ die Linearkombination

$$\sigma = y_0 + \frac{1}{6}(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4)$$

der beschränkten C^5 -Funktionen w_1 , w_2 , w_3 und w_4 mit beschränkten partiellen Ableitungen nach h bis zur 5. Ordnung. Also ist auch σ eine beschränkte

C^5 -Funktion mit beschränkten partiellen Ableitungen nach h bis zur 5. Ordnung; für jedes $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist

$$\frac{\partial^j \sigma}{\partial h^j} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^j w_1}{\partial h^j} + 2 \frac{\partial^j w_2}{\partial h^j} + 2 \frac{\partial^j w_3}{\partial h^j} + \frac{\partial^j w_4}{\partial h^j} \right).$$

Insbesondere ist unter Benutzung von (109), (113), (123) und (133)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial h}(t_0, y_0, 0) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial w_1}{\partial h}(t_0, y_0, 0) + 2 \frac{\partial w_2}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial w_3}{\partial h}(t_0, y_0, 0) + \frac{\partial w_4}{\partial h}(t_0, y_0, 0) \right) \\ &= f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

was mit der rechten Seite von (96) übereinstimmt. Unter Benutzung von (110), (115), (125) und (135) gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) + 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) + \frac{\partial^2 w_4}{\partial h^2}(t_0, y_0, 0) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

was mit der rechten Seite von (97) übereinstimmt. Unter Benutzung von (111), (117), (127) und (137) gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) + 2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^3 w_3}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) + \frac{\partial^3 w_4}{\partial h^3}(t_0, y_0, 0) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

was mit der rechten Seite von (98) übereinstimmt. Schließlich gilt unter

Benutzung von (111), (119), (129) und (139)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 \sigma}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) + \frac{\partial^4 w_4}{\partial h^4}(t_0, y_0, 0) \right) \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_0, y_0) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^3 \\
&\quad + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \\
&\quad + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) f(t_0, y_0)^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right)^3 f(t_0, y_0),
\end{aligned}$$

was mit der rechten Seite von (99) übereinstimmt.

Literatur

Hauptreferenz für Mathematik für Maschinenbauer an der UPB ist das mehrbändige Werk von Burg/Haf/Wille, insb.

- K. Burg, H. Haf, F. Wille, “Höhere Mathematik für Ingenieure: Band I: Analysis,” 8. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille, “Höhere Mathematik für Ingenieure: Band II: Lineare Algebra,” 5. Auflage, B.G. Teubner und GMV Fachverlage, Wiesbaden, 2007.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille, “Höhere Mathematik für Ingenieure: Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen,” 4. Auflage, B.G. Teubner, Wiesbaden, 2002.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille, “Vektoranalysis: Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker,” B.G. Teubner und GWV Fachverlage, Wiesbaden, 1. Auflage, 2006.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister, “Funktionentheorie: Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker,” Springer Vieweg, Wiesbaden, 2. Auflage, 2013.

Die meisten Themen der Vorlesung werden auch dort behandelt (nicht immer in ähnlicher Form).

Ergänzende Literatur

- M. Lehn und H. Wegmann, “Einführung in die Statistik,” 5. Auflage, B.G. Teubner und GWV Fachverlage, Wiesbaden, 2006.
- K. Meyberg, P. Vachenauer, “Höhere Mathematik 1: Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung,” 5. Auflage, Springer, Berlin, 1999.
- K. Meyberg, P. Vachenauer, “Höhere Mathematik 2: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung,” 4. Auflage, Springer, Berlin, 2001.

Alle genannten Werke sind (im Netzwerk der Uni oder über VPN) auch als elektronische Ressource auf den Seiten der Universitätsbibliothek verfügbar.