Vorbesprechung zum Seminar Funktionalanalysis

Prof. Dr. Helge Glöckner

30. September 2021

Überblick

* Allgemeines zum Seminar
* Behandelte Themenkreise
* Mitteilen Ihrer Präferenzen

Allgemeines

Das Seminar findet in Präsenz dienstags von 16:00-18:00 Uhr in A3.301 statt (wenn die Corona-Situation es zulässt) und hat 15 Sitzungen.

Vorkenntnisse:

Grundwissen der Funktionalanalysis in Banachräumen und Hilberträumen wird vorausgesetzt (Begriff des Hilbertraums, Satz der offenen Abbildung, Satz von Hahn-Banach, Satz von Banach-Alaoglu, Approximationssatz von Stone-Weierstraß).

In den letzten drei Vorträgen kommen auch allgemeinere topologische Vektorräume und Halbnormen auf solchen vor.

Struktur des Seminars

Das Seminar ist zweigeteilt:

Teil I (Vorträge 1–8)

Spektraltheorie von Banachalgebren, insbesondere für kommutative C^*-Algebren.

Hierzu gehört die Spektraltheorie für normale Operatoren $T: H \to H$ eines komplexen Hilbertraums H (so dass also $TT^* = T^*T$).

Teil II (Vorträge 9–15)

Speziellere Themen und Einzelthemen basierend auf den Grundlagen der Vorträge 1–8.

Je nach Teilnehmerzahl werden in der Regel zunächst Themen in Teil II vergeben. Nicht an Studierende vergebene Vorträge werden vom Dozenten gehalten.

Tafelvorträge sind erwünscht.

Vortragszeit:

c.a. 90 Minuten Redezeit bei Tafelvorträgen

Nach der Hälfte der Vortragszeit je 10 Minuten Pause!

Zu jedem Vortrag gibt es drei **verpflichtende Vorbesprechungen** in Präsenz oder via ZOOM, zu denen individuell Termine vereinbart werden.

TEIL I.

1. Banachalgebren und holomorpher Funktionalkalkül.

Beispiele von Banachalgebren sind die Algebra $B(X)$ der beschränkten linearen Operatoren $T\colon X \to X$ für einen Banachraum X und die Algebra $C(K)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum K.

Ist A eine Banachalgebra, so lässt sich jedem Element $x \in A$ ein Spektrum $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}$ zuordnen, das die Menge der Eigenwerte eine Endomorphismus T von $\mathbb{C}^d$ verallgemeinert. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ist auf ganz A konvergent und allgemeiner lässt sich ein Element $f[x] \in A$ definieren, wenn f eine holomorphe Funktion ist mit $\sigma(x)$ im Definitionsbereich.

2. Kommutative C^*-Algebren

Eine Banachalgebra $(A, \|\cdot\|)$ mit Involution $*$ heißt **C^*-Algebra**, wenn $\|xx^*\| = \|x\|^2$. Mit dem komplexen Konjugieren von Funktionen ist $C(K)$ eine kommutative C^*-Algebra und wir zeigen, dass jede kommutative C^*-Algebra zu einem $C(K)$ isomorph ist (Gelfand-Theorie). Ist H ein komplexer Hilbertraum, so lässt sich jeder $*$-Algebra-Homomorphismus $\pi\colon C(K) \to B(H)$ über ein $B(H)$-wertiges Spektralmaß E auf K beschreiben,

$$\pi(f) = \int_K f(x)\, dE(x),$$

dessen Werte Orthogonalprojektionen sind.

3. Anwendung: Spektralzerlegung normaler Operatoren.

Für jeden normalen Operator $T \in B(H)$ (so dass also $TT^* = T^*T$) sei $C^*(T) \subseteq B(H)$ der Abschluss der von T und T^* erzeugten Unteralgebra mit Eins. Dann ist $C^*(T)$ eine kommutative C^*-Algebra und man erhält ein Spektralmaß auf $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ mit $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE(\lambda)$.

TEIL II.

4. Unbeschränkte Operatoren und Erzeuger von Halbgruppen (Vorträge 9–12)

Analoge Spektralzerlegung für unbeschränkte normale Operatoren $T\colon D(T) \to H$ mit einem dichten Untervektorraum $D(T) \subseteq H$.

Satz von Stone: $U(t) = e^{iHt}$ für stark stetige unitäre Einparametergruppen mit einem selbstadjungierten Operator H.

Satz von Hille-Yosida (Charakterisierung von Erzeugern von Halbgruppen)

5. Algebren mit stetiger Inversion (Vorträge 13–15)

Holomorpher Funktionalkalkül ist auch möglich für geeignete topologische Algebren A, welche lokal konvexe topologische Vektorräume sind, nämlich "continuous inverse algebras" (cias) mit offener Einheitengruppe und stetiger Inversion $A^x \to A$, $x \mapsto x^{-1}$ (z.B. $C^\infty[0,1]$).

A continuous inverse algebra (cia): $A^{\times}$ offen, $x \mapsto x^{-1}$ stetig.

Satz von Turpin: Jede kommutative cia ist lokal m-konvex, d.h. es gibt die Topologie definierende Halbnormen q, welche submultiplikativ sind (also $q(xy) \leq q(x)q(y)$).

Dierolf-Wengenroth: Für jede aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ von Banachalgebren ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine lokal m-konvexe cia in der lokal konvexen direkten Limestopologie

Weiteres Vorgehen

Teilen Sie Ihre Präferenzen für Ihr Vortragsthema bis 8.10.2021 per Email mit an glockner@math.upb.de (bitte mehrere Präferenzen!)

Seminaranmeldung

Zusätzlich zur Anmeldung für das Seminar muss die Prüfungsanmeldung für den Vortrag erfolgen:

Die Prüfungsanmelde- und Prüfungsabmeldephase bei Seminaren und Proseminaren ist Montag, 4.10.2021 bis Freitag, 29.10.2021.

Die Teilnahme an drei Vortrags-Vorbesprechungen ist verbindlich und wird als **qualifizierte Teilnahme** gewertet.

Nach Zuweisung der Themen bekommen Sie einen Terminvorschlag für einen ersten Vorbesprechungstermin sowie (falls nicht sowieso elektronisch verfügbar) Materialien zum Vortragsthema.