Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

2. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 2.1 Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}; \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{falls } x \text{ ungerade ist;} \\ -\frac{x}{2}, & \text{falls } x \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 2.2 Sei X eine Menge. Man ermittle eine Injektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ und eine Surjektion $g : \mathcal{P}(X) \to X$.

Beispiel: Die Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$; $x \mapsto \{x\}$ ist eine Injektion.

Sei $x_0 \in X$. Die Abbildung $g : \mathcal{P}(X) \to X; A \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } |A| = 1 \text{ und } A = \{x\}; \\ x_0, & \text{falls } |A| \neq 1. \end{cases}$
ist eine Surjektion.

Präsenzaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz (*Satz 1.3.26 in Soergels Skript Mengen und Verknüpfungen*).
Seien X, Y, Z Mengen und sei $g : Y \to Z$ eine Abbildung.

(iii) Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$.

Beweis: Nehme erst an, dass g injektiv ist. Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ und nehme an, dass $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Für jede $x \in X$ gilt $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$. Weil g injektiv ist, folgt $f_1(x) = f_2(x)$. Dies beweist, dass $f_1 = f_2$.
Nehme jetzt an, dass für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$. Sei $z \in g(Y)$ und $y_0 \in X := g^{-1}(\{z\})$. Definiere

$$\begin{aligned} f_1 : X \to Y; &\quad y \mapsto y \\ f_2 : X \to Y; &\quad y \mapsto y_0. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $x \in X$, dass $g(f_1(x)) = z = g(f_2(x))$. Damit gilt $g \circ f_1 = g \circ f_2$ und darum $f_1 = f_2$. Es folgt, dass $g^{-1}(\{z\}) = \{y_0\}$. Weil dies gilt für alle $z \in g(Y)$, ist g injektiv.

Präsenzaufgabe 2.4 Es sei X eine beliebige Menge und $\mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\{0,1\}$. Bestimmen Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$.

Beispiel: Sei $f : \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ für $A \in \mathcal{P}(X)$ gegeben durch $f(A) = \mathbf{1}_A$, wobei

$$\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A; \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Die Abbildung

$$g : \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}) \to \mathcal{P}(X); \quad \phi \mapsto \{x \in X : \phi(x)\}$$

ist eine inverse Funktion der Funktion f. Weil f eine inverse Funktion hat, ist f eine Bijektion.

Präsenzaufgabe 2.6 (*Aus Soergels Skript*) Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\cap : \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z), \quad (A,B) \mapsto A \cap B$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Lösung: Seien $A, B, C \subseteq Z$. Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Darum ist das Schneiden eine kommutative und assoziative Verknüpfung. Die Menge Z ist ein neutrales Element. Weil $A \cup B = B \cup A$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ist auch die Vereinigung kommutativ und assoziativ. Die leere Menge $\emptyset$ is ein neutrales Element für Vereinigung. Im Allgemeinen sind $A \setminus B$ und $B \setminus A$ nicht gleich. Auch ist $A \setminus (B \setminus C)$ im Allgemeinen ungleich an $(A \setminus B) \setminus C$. Darum ist das Bilden der Differenzmenge nicht kommutativ oder assoziativ.

Hausaufgabe 2.2 Beweisen Sie den folgenden Satz (*Satz 1.3.28 in Soergels Skript Mengen und Verknüpfungen*).
Seien A und B Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;

(ii) Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.

Beweis: Wir beweisen erst (iii). Nehme an, dass f surjektiv ist. Seien $g_1, g_2 : Y \to Z$ und nehme an, dass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Für jede $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$ und damit $g_1(y) = g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = g_2(y)$. Es folgt, dass $g_1 = g_2$.
Nehme jetzt an, dass für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$. Definiere

$$\begin{aligned} g_1 :& Y \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in f(X) \\ 0, & \text{falls } x \in Y \setminus f(X) \end{cases} \\ g_2 :& Y \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto 1. \end{aligned}$$

Es gilt $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ und darum $g_1 = g_2$. Es folgt, dass $Y \setminus f(X) = \emptyset$ und damit $Y = f(X)$.
Jetzt beweisen wir (i). Seien $\phi_1, \phi_2 : Z \to A$ Abbildungen mit $\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g$. Dann $\phi_1 \circ (g \circ f) = \phi_2 \circ (g \circ f)$. Weil $g \circ f$ surjektiv ist, folgt aus (iii), dass $\phi_1 = \phi_2$. Nach (iii) ist g injektiv.
Zum Schluss beweisen wir (ii). Seien $\phi_1, \phi_2 : Z \to A$ Abbildungen mit $\phi_1 \circ g \circ f = \phi_2 \circ g \circ f$. Weil f surjektiv ist, folgt aus (iii), dass $\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g$. Auch g ist surjektiv und darum folgt aus (iii), dass $\phi_1 = \phi_2$. Jetzt benützen wir (iii) nochmals und schliessen, dass $f \circ g$ surjektiv ist.

Hausaufgabe 2.3 Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ niemals surjektiv ist. Hinweis: Betrachten Sie die Menge $Y := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Beweis: Wir nehmen an es gäbe eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ und betrachten die Menge $Y := \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = Y$. Auf Grund der Definition von Y folgt, dass $x \in Y$ wenn $x \notin Y$ und umgekehrt $x \notin Y$ wenn $x \in Y$. Dies ist ein Widerspruch.

Hausaufgabe 2.4 (*Aus Soergels Skript*) Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X, Y endliche Mengen. So gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y, und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-|X|+1)$ Injektionen.

Beweis durch vollständige Induktion: Wenn $|X| = 1$ und $X = \{x\}$, dann gibt es für jede $y \in Y$ genau eine Abbildung $f : X \to Y$, sodass $f(x) = y$. Darum gibt es $|Y|$ Abbildungen von X nach Y. Diese Abbildungen sind alle injektiv. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass für alle Mengen X' mit $|X'| = n$ es $|Y|^n$ Abbildungen und $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)$ Injektionen von X' nach Y gibt. Sei X eine Menge mit $|X| = n+1$. Wähle eine Teilmenge X' von X mit $|X'| = n$. Sei $x \in X \setminus X'$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ wird bestimmt durch $f|_{X'}$ und $f(x)$: für jede Abbildung $\phi : X' \to Y$ und $y \in Y$ gibt es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f|_{X'} = \phi$ und $f(x) = y$. Weil es $|Y|^n$ Abbildungen $\phi : X' \to Y$ gibt und $|Y|$ Elementen in Y, gibt es genau $|Y|^n\,|Y| = |Y|^{n+1}$ Abbildungen von X nach Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Injektion, wenn $f|_{X'}$ eine Injektion ist und $f(x) \notin f(X')$. Weil es $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)$ Injektionen von X' nach Y und $|Y|-|X'| = |Y|-n$ Elementen in $Y \setminus f(X')$ gibt, gibt es $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-n+1)(|Y|-n)$ Injektion von X nach Y.

Hausaufgabe 2.5 Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Menge $F_n = \{1, 2, ..., n\}$ gegeben. Ferner bezeichne $\mathrm{Bij}(F_n)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von F_n in sich selbst. Zeigen Sie:

$$|\mathrm{Bij}(F_n)| = n!$$

Beweis: Das Bild einer Injektion von F_n nach F_n enthält genau n Elementen and damit ist jede Injektion eine Bijektion. Nach Hausaufgabe 2.4 gibt es $n!$ Injektionen von F_n nach F_n.